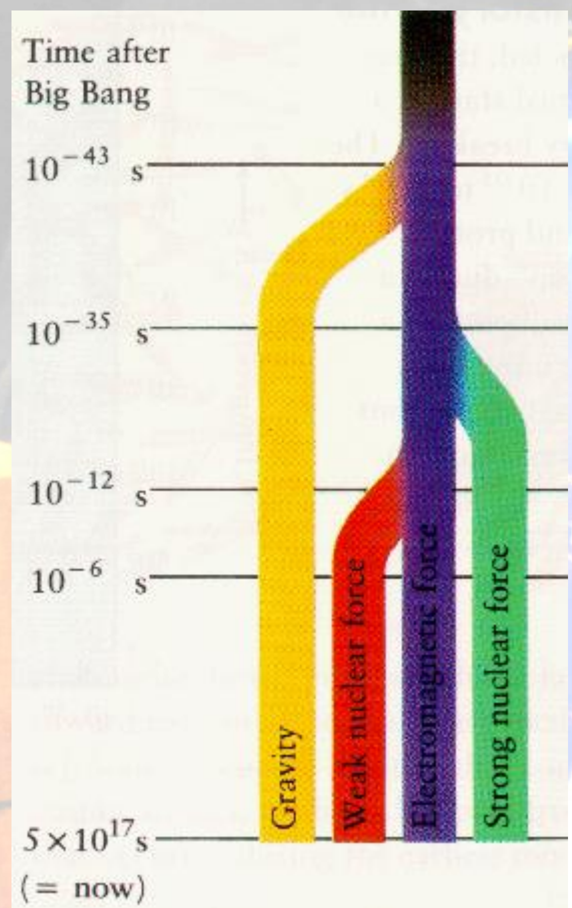
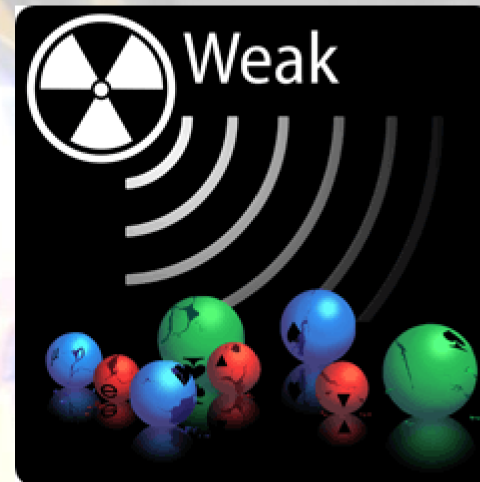
Fyzikální základy elektrotechniky VOŠIS

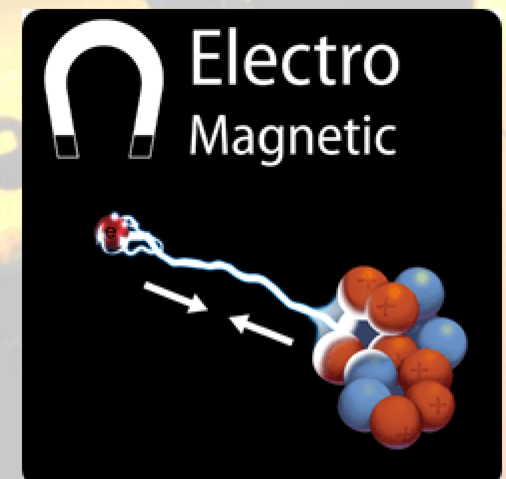
SOUHRN PROBRANÉ LÁTKY

[zim. semestr]

Elektromagnetická interakce



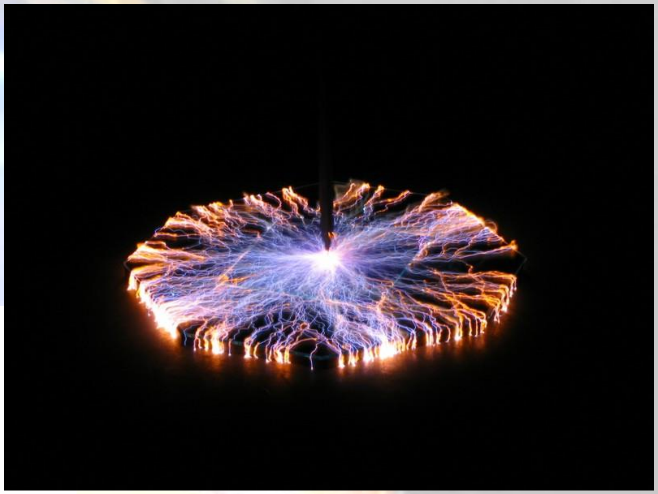


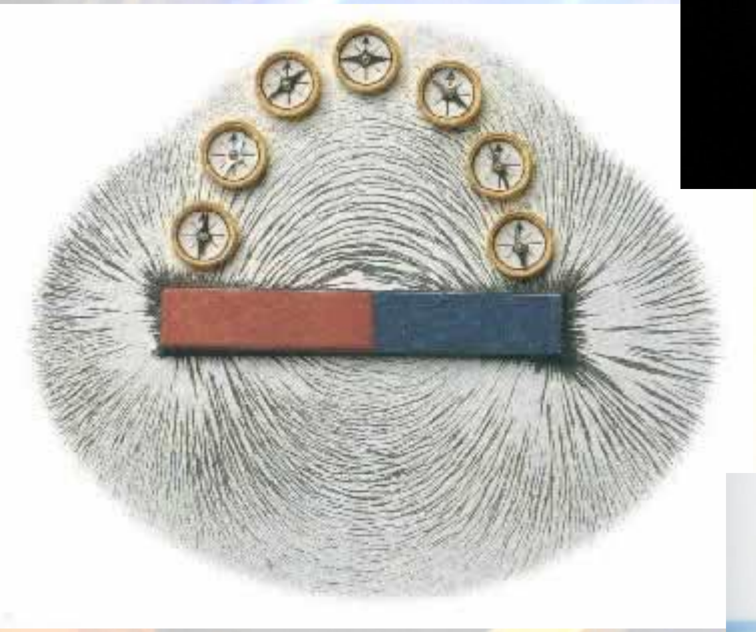


V současné době známe čtyři druhy sil – interakcí. Jejich podstata není zcela objasněna, fyzici ale věří, že jsou všechny čtyři jen různými projevy téhož.

Elektromagnetická interakce

Důsledky gravitační síly, jíž podléhají všechny známé částice, jsme si probrali v minulých přednáškách.



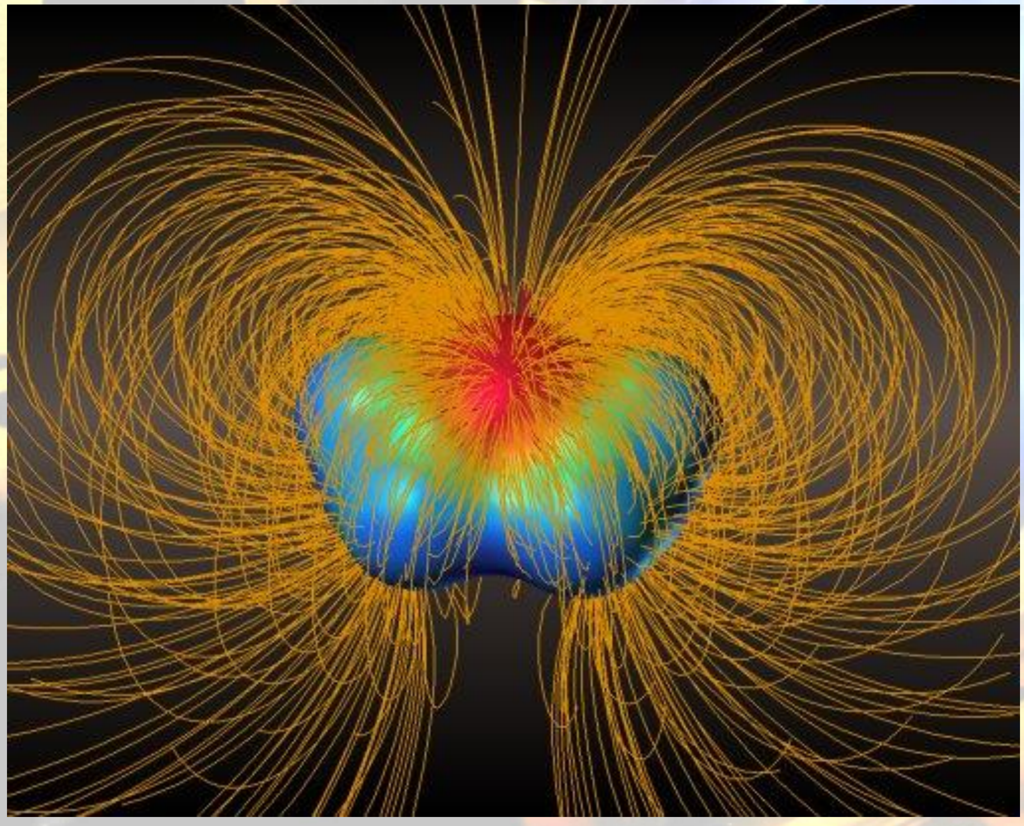


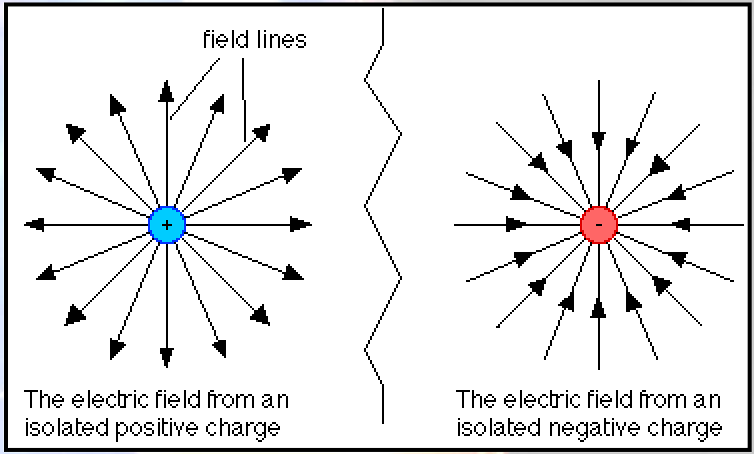
Nyní se budeme zabývat důsledky interakce elektromagnetické, které podléhají všechny částice, nesoucí elektrický náboj.

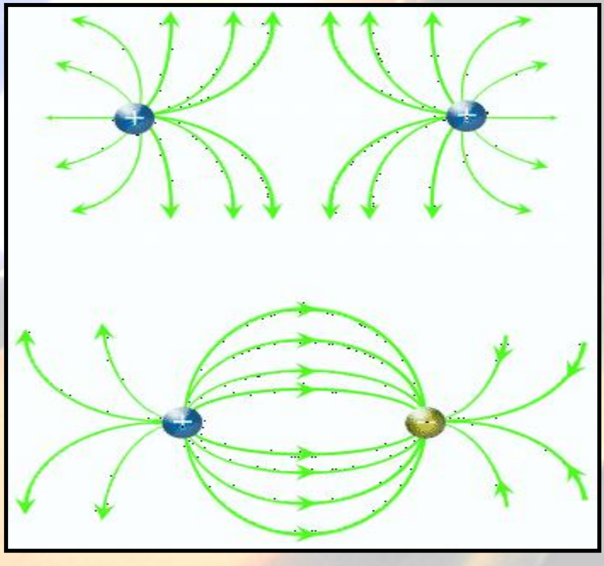
Elektrický náboj

Elektrický náboj nese většina známých elementárních částic (kromě fotonů, neutrin a intermediálního bozonu Z všechny objevené). Každá nabitá částice vytváří centrální izotropní elektrické pole, které interaguje s jinými nabitými částicemi. Výsledné pole více částic už samozřejmě nemusí být ani centrální, ani izotropní.

Na rozdíl od „gravitačního náboje“ (hmotnost) má elektrický náboj dvě znaménka a síla může být odpudivá (++,--) či přitažlivá (+-).







Elektrický náboj

- Platí zákon zachování elektrického náboje. Celkový náboj je nestvořitelný a nezničitelný – při reakcích mohou částice vznikat i zanikat, ale dohromady musí mít vždy nulový náboj. Proto vznikají-li například částice v párech, má vždy jedna kladný a jedna záporný náboj.

$$\sum q = konst.$$

- Elektrický náboj je relativisticky invariantní – při přechodu mezi soustavami nemění náboj částice svoji velikost.
- Náboj je kvantován. Existuje nejmenší možný elementární náboj a všechny vetší náboje jsou jeho násobky. Za tento náboj se považuje buď náboj elektronu (e) nebo v posledních desetiletích náboj kvarků **u** (⅔ e) a **d** (-⅓ e) – ty se ale nikdy nevyskytují samostatně.
- Náš vesmír je jako celek kvazineutrální – v každém velkém objemu je přibližně stejný počet kladných i záporných nábojů.
- Stejně jako jsme si v mechanice těleso modelovali hmotným bodem (celou hmotností tělesa umístěnou v jeho těžišti), tak v elektřině si nabitou částici nebo i větší těleso modelujeme bodovým nábojem – tj. celkovým nábojem umístěným v jedom matematickém bodě, jehož polohový vektor lze vypočítat jako

$$\vec{R} = \frac{\sum q_i \vec{r}_i}{\sum q_i}$$

Coulombův zákon

Charles Augustin de Coulomb
1736-1806

V roce 1780 francouzský fyzik Charles Coulomb odvodil zákon pro velikost síly mezi dvěma bodovými náboji:

$$F = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Tato síla je centrální, míří podél spojnice nábojů, je odpudivá pro souhlasné náboje a přitažlivá pro opačné a také se nápadně podobá Newtonově gravitační síle, což mnoho vypovídá o vlastnostech vesmíru.

Konstantu k je třeba určit tak, aby byla dobře definována jednotka elektrického náboje. V soustavě SI je

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 0.8988 \cdot 10^{10} \quad Nm^2C^{-2} \quad \left(= kgm^2s^{-4}A^{-2}\right)$$

kde ε_0 je tzv. permitivita vakua, pro kterou platí

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2 \cdot 10^{-7}} \doteq 8.85 \cdot 10^{-12} \quad C^2N^{-1}m^{-2}$$

Jednotka elektrického náboje je 1 Coulomb. Z definice SI je

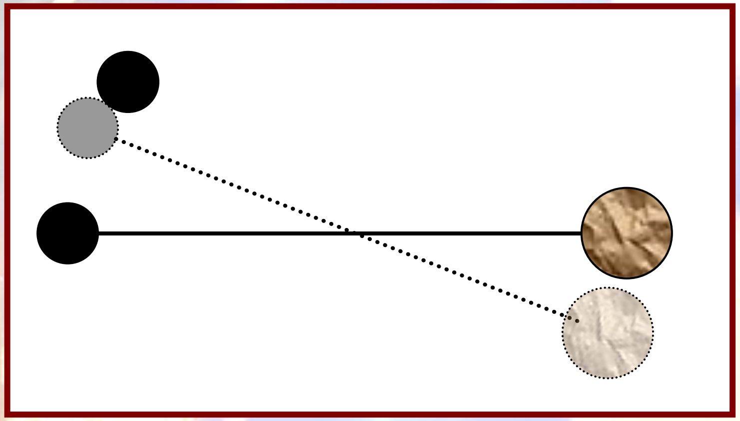
$$q = I.t$$

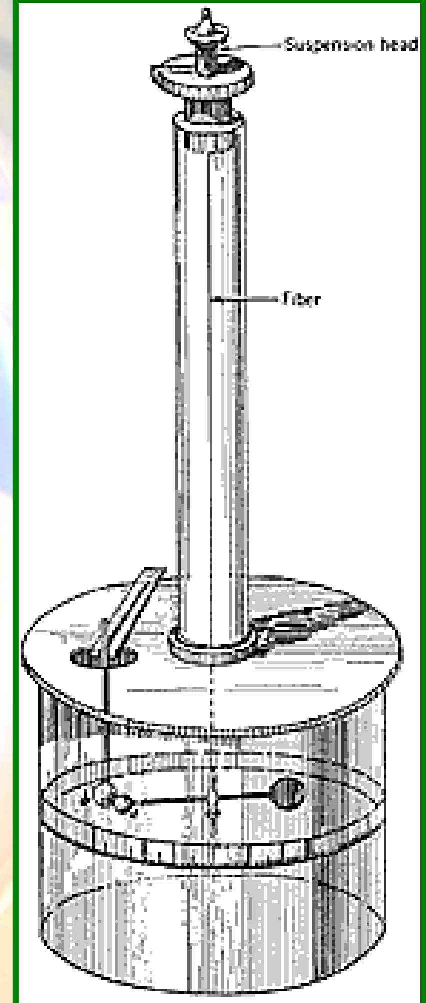
$$[q] = C = A \cdot s$$

Coulombův zákon

Charles Augustin de Coulomb
1736-1806

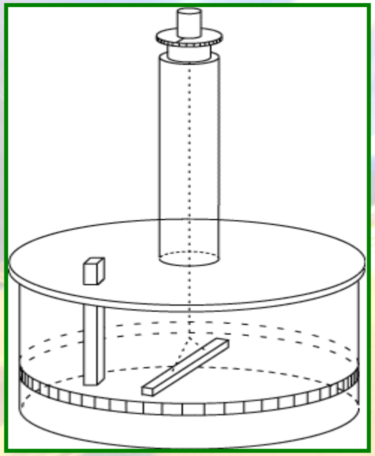
Coulomb sám zákon experimentálně ověřil pomocí torzních vah.





Coulomb's Torsion Balance

Podobný experiment prováděl Coulomb pro tyčové magnety a stanovil závislost síly na vzdálenosti pro magnetické náboje. Dnes víme, že v tyčových magnetech způsobují magnetickou sílu pohyby elektrických nábojů a tzv. magnetický monopól nebyl dosud nalezen.



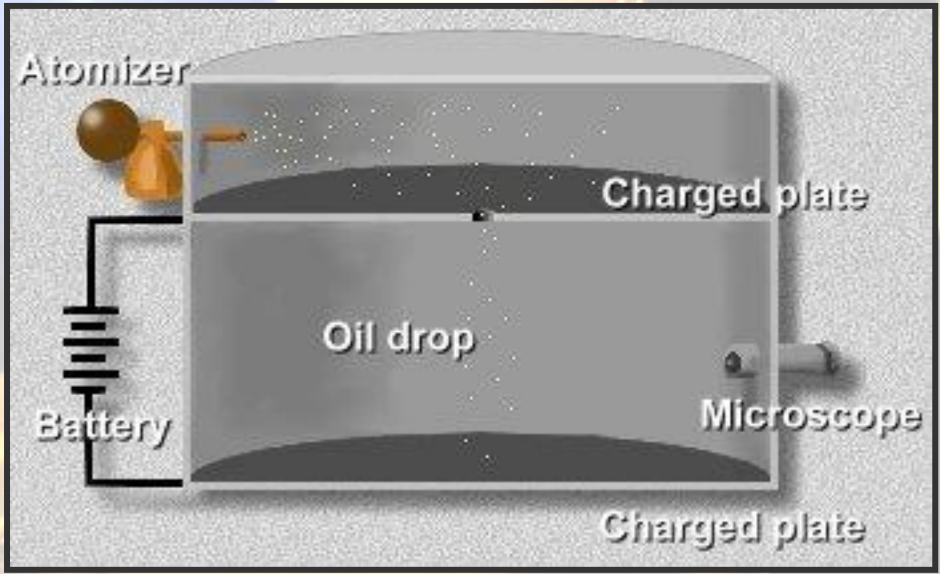
Elementární náboj

Nyní je na místě se zeptat, jak velký je elementární náboj. Tato konstanta má hodnotu

Robert Andrews Millikan
1868-1953

$$e \doteq 1.602 \cdot 10^{-19} \quad C$$

kterou jako první snažil změřil v roce 1909 americký fyzik R. Millikan. Ve svém experimentu porovnával přitažlivou sílu nabitých olejových kapek s odporem vzduchu. Experiment nebyl příliš přesný, Millikan třeba neznal dobře viskozitu vzduchu, která je pro výpočet potřeba. Přesnější metodu, jak určit *e*, nabízí například studiu elektrolýzy. Nicméně Millikan byl (mimo jiné) za tento pokus oceněn Nobelovou cenou.



Elementární náboj

Millikanův experiment na FJFI

Elektrostatické pole bodového náboje

Zákon síly pro elektrostatické přitahování či odpuzování je

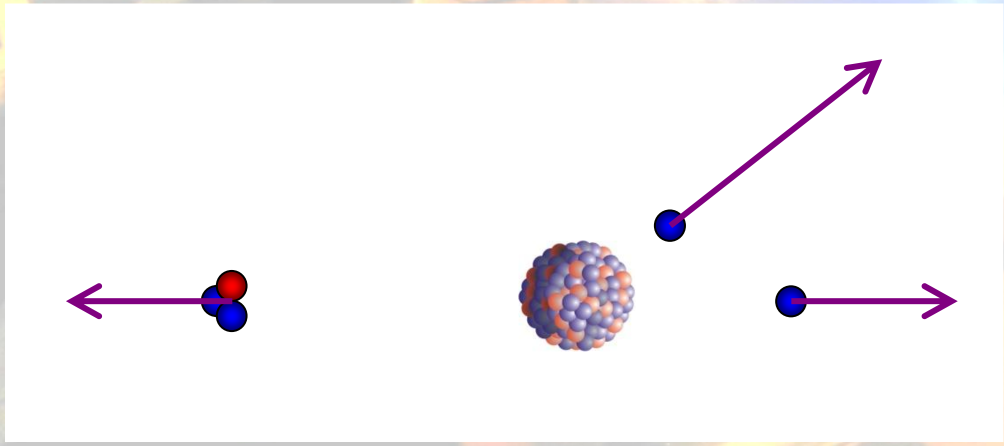
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

a tato síla závisí na nábojích dvou částic. Nás ovšem většinou zajímají vlastnosti jedné částice. Definujme si tedy elektrostatické vektorové pole částice s nábojem Q jako

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

kde *E* je vektor intenzity pole a *r* je polohový vektor, je-li náboj *Q* umístěn v počátku souřadnic. Sílu, kterou pole působí na vložený náboj pak můžeme zapsat jako

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

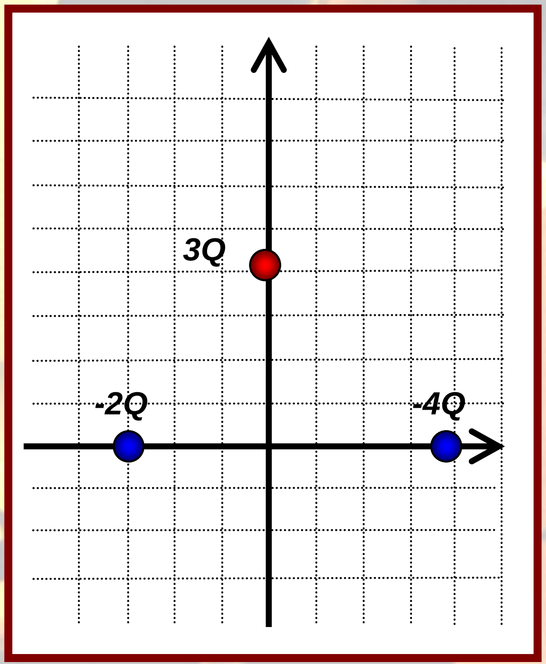


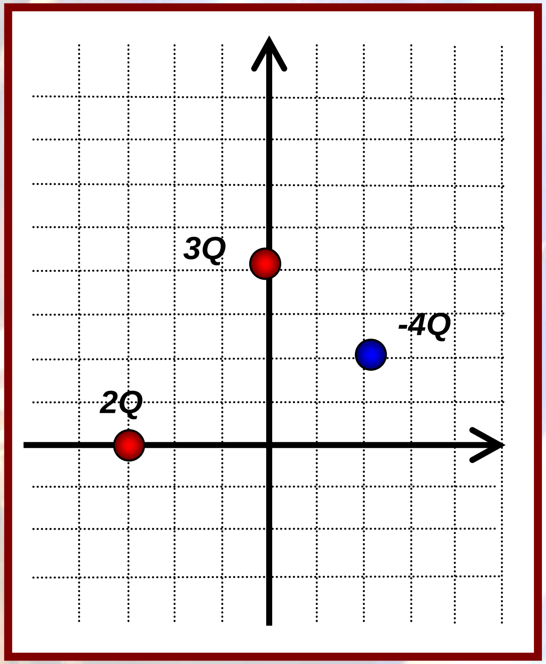
Je-li nábojů více nebo není-li Q v počátku, je třeba spočítat standardní vektorový součet nebo posun.

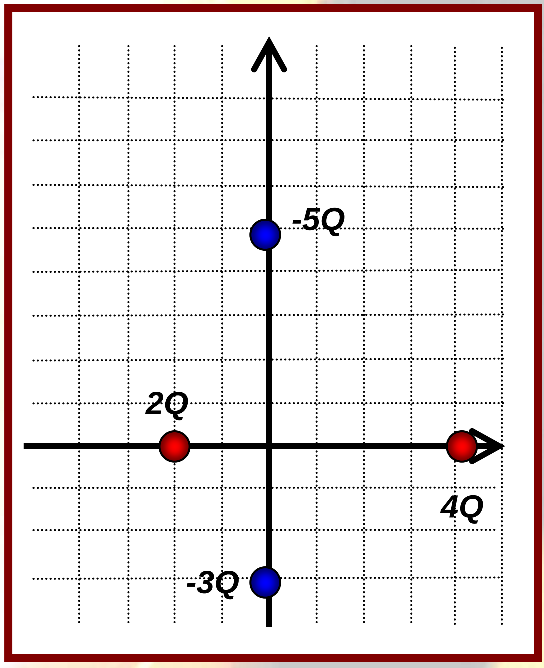
Elektrostatické pole bodového náboje

Příklad

Zjistěte, jaká síla působí na testovací náboj *q* v počátku, je-li rozložení nábojů kolem následující:



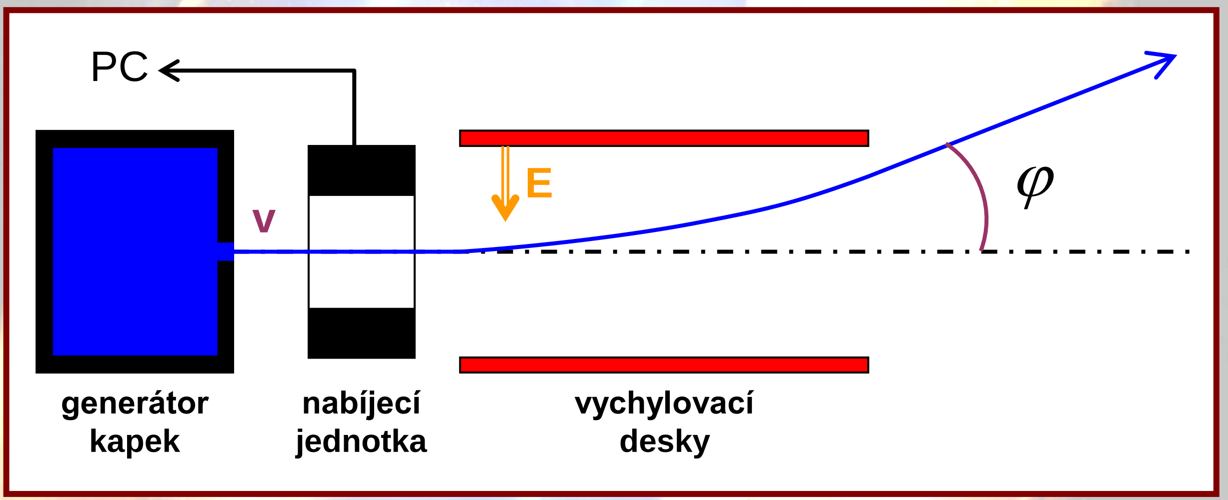




Elektrostatické pole

Příklad

Moderní inkoustové tiskárny pracují na podobném principu jako Millikanova aparatura. Kapičky barvy se elektricky nabijí podle povelů z počítače a vystříknou se konstantní rychlostí skrz homogenní elektrické pole. Spočítejte, o jaký úhel se vychýlí v závislosti na dodaném náboji.



Spočítejte nejprve obecně závislost $\varphi \equiv \varphi(q)$, kde q je náboj dodaný kapce řídícími obvody a jako konstantní parametry užijte v (rychlost kapky), m (hmotnost kapky), E (intenzitu pole) a L (délku vychylovacích desek). Poté dosaďte konkrétní hodnoty

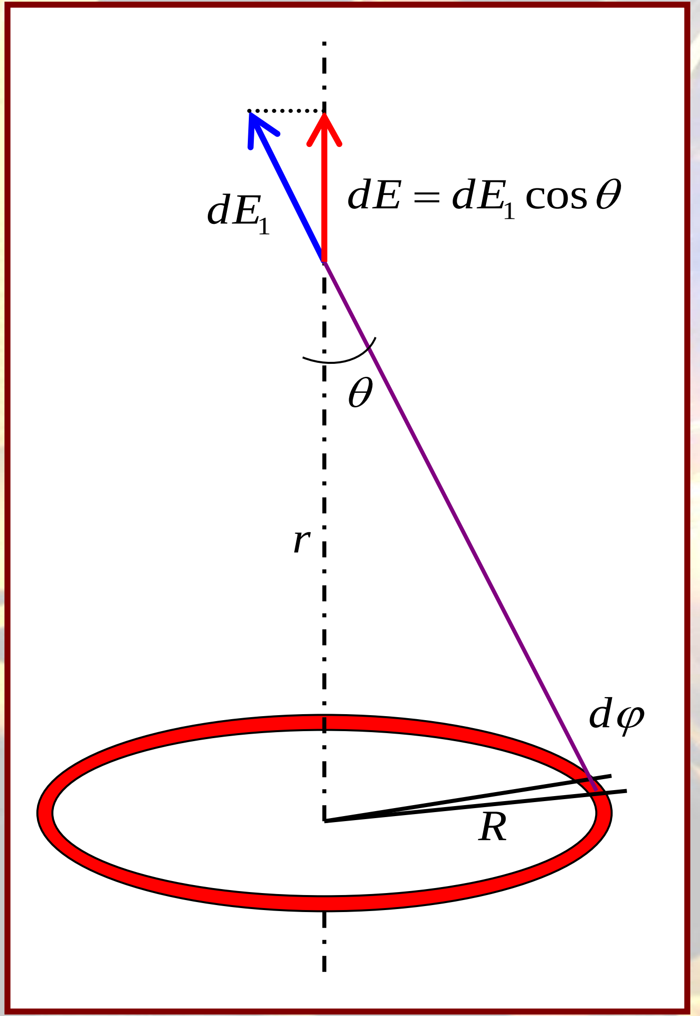
$$q = 1.5 \cdot 10^{-13} \quad C \qquad m = 1.3 \cdot 10^{-10} \quad kg$$

$$v = 18 \quad ms^{-1} \qquad E = 1.4 \cdot 10^{6} \quad NC^{-1}$$

Elektrostatické pole

Příklad

Spočítejte intenzitu elektrického pole na ose, procházející tenkým prstencem, na kterém je rovnoměrně rozložen náboj q.



Prstenec se skládá z nekonečného množství bodů. Každému jednotlivému bodu můžeme přiřadit infinitezimální zlomek celkového náboje, dopočítat pro něj patřičnou infinitezimální intenzitu a pak intenzity vysčítat – a protože je jich nekonečně mnoho a jsou nekonečně malé, musíme sáhnout po integrálním počtu.

$$dq = q \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$$ infinitezimální náboj

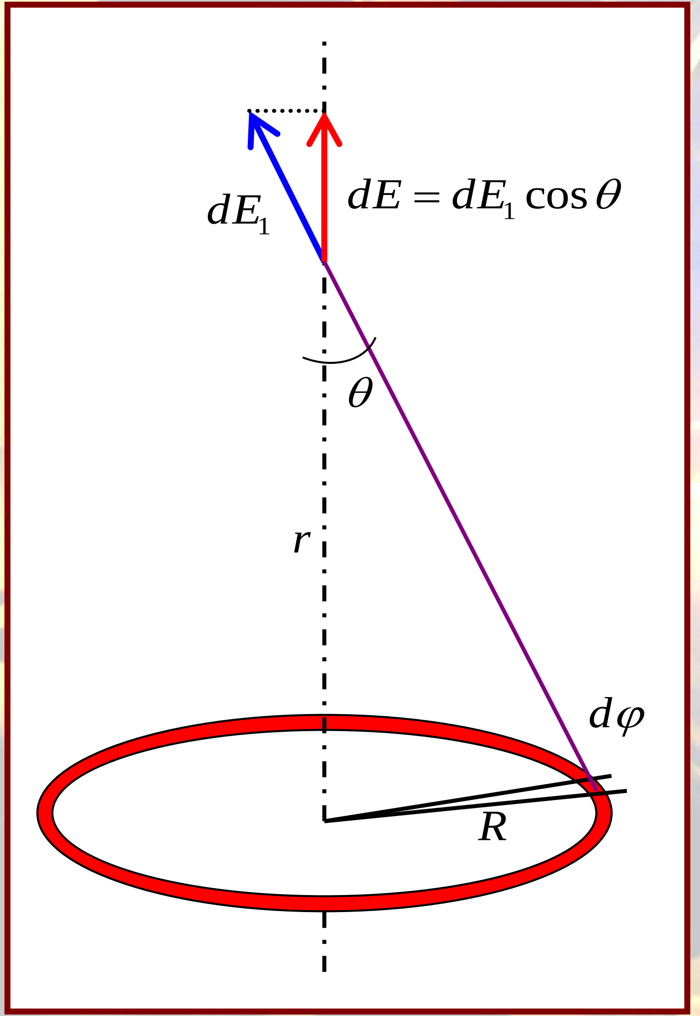
$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{(r^2 + R^2)} \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}$$

Elektrostatické pole

Příklad

Spočítejte intenzitu elektrického pole na ose, procházející tenkým prstencem, na kterém je rovnoměrně rozložen náboj q.



$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot d\varphi}{2\pi(r^2+R^2)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}$$

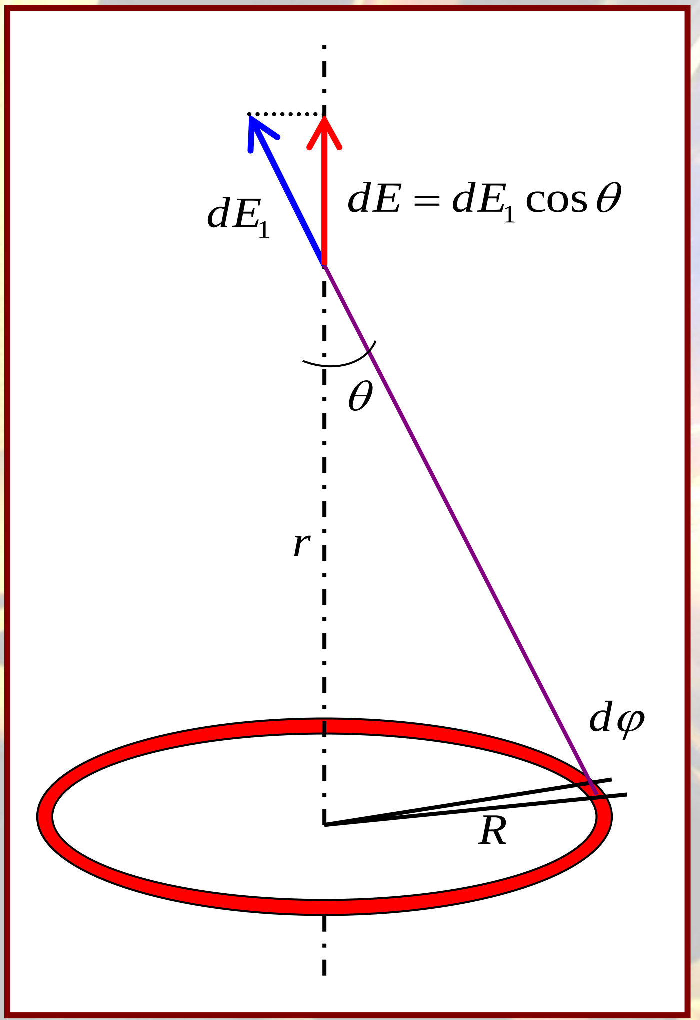
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{2\pi(r^2+R^2)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{(r^2+R^2)}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+R^2}}\frac{2\pi}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q\cdot r}{(r^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Elektrostatické pole

Příklad Spočítejte intenzitu elektrického pole na ose, procházející tenkým prstencem, na kterém je rovnoměrně rozložen náboj q.



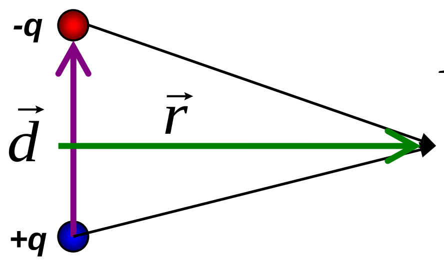
Pro velké vzdálenosti, kde *r* >> *R*, platí

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot r}{(r^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

což je logický závěr – z velké vzdálenosti vypadá prstenec jako bod a pole tedy má intenzitu bodového náboje.

Elektrostatické pole dipólu

Důležité je elektrické pole dipólu – tedy dvou blízkých nábojů opačného znaménka. Takovou strukturu mají například jednoduché molekuly. Dipól je popsán velikostí náboje *q* a vzdáleností, ve které od sebe částice +*q* a –*q* jsou. Pro velikost intenzity platí



$$E = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d})^2} - \frac{1}{(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d})^2}\right)$$

a omezíme-li se jen na r kolmý k d, pak po menší úpravě

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2}\frac{d}{r})^2} - \frac{1}{(1+\frac{1}{2}\frac{d}{r})^2}\right) \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\left(1+\frac{d}{r}+\cdots\right)-\left(1-\frac{d}{r}+\cdots\right)\right)$$

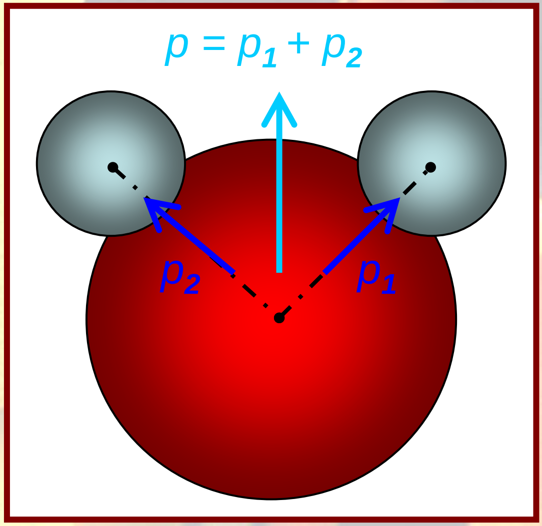
Poslední výraz jsme z předchozího dostali pomocí rozvoje do Taylorovy řady. Protože se na dipól obvykle díváme zdálky, je *r* >> *d*, tedy *d*/*r* << *1* a všechny členy Taylorovy řady kromě prvních dvou lze zanedbat. Proto

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{2d}{r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot d}{r^3}$$

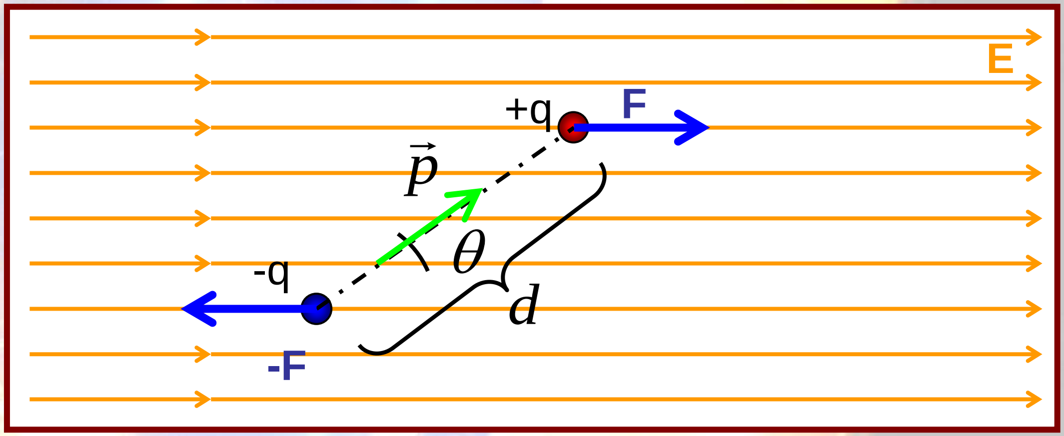
Součin *q*.*d* nazýváme elektrický dipól. Vektorově pak $\boxed{\vec{p} = q\cdot\vec{d}}$

Dipól v elektrickém poli

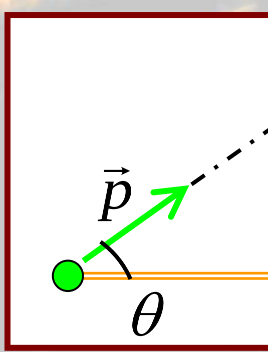
Dipólový moment jsme definovali jako $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$. Takto definovaný dipól ovšem ve skutečnosti nemusí být tvořen jen dvěmi náboji. Například molekula vody tvoří dipól, i když se skládá ze tří nabitých částic:



Studujme, jak se dipól chová ve vnějším elektrickém poli:



Na oba náboje působí síly o velikosti $F = qE$, ovšem s opačnými směry, takže tvoří silovou dvojici. Jejich výslednice je sice nulová, nicméně nulový není jejich celkový moment ! Tedy :



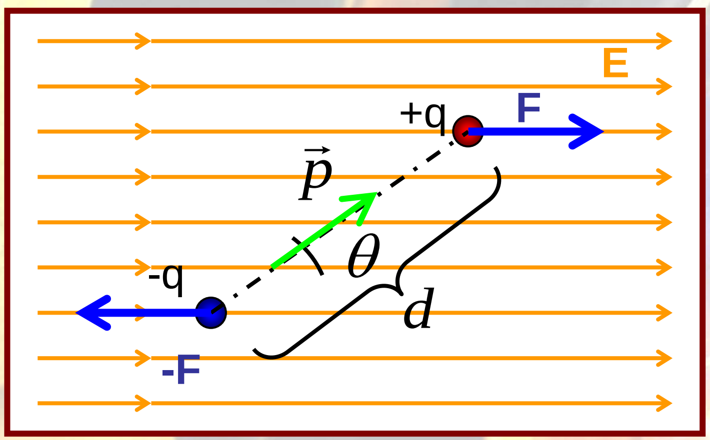
$$M = 2 \times \left(\tfrac{1}{2} \cdot d \cdot F \cdot \sin\theta\right)$$

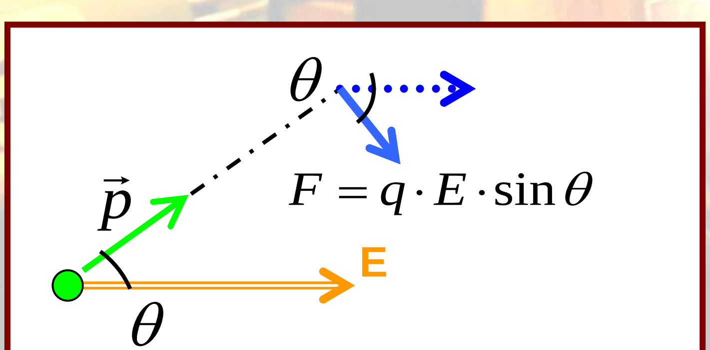
Dipól se tedy má v elektrickém poli tendenci otáčet, a to tak, aby vektor *p* směřoval souhlasně s vektorem *E* v daném bodě:

$$M = d \cdot F \cdot \sin\theta = \frac{p}{q} \cdot qE \cdot \sin\theta = p \cdot E \cdot \sin\theta$$

Dipól v elektrickém poli

Je-li dipól v elektrickém poli tak, že směr vektoru *p* je kolmý na směre vektoru *E*, působí na něj síla. Pokud dipól postupně otáčíme, síla koná práci. To ale znamená, že dipól v elektrickém poli má potenciální energii, která je závislá na jeho natočení! Odvoďme si ji:





Práce je změna energie, a pokud si definujeme, že potenciální energie dipólu natočeného souhlasně s polem je nulová, potom platí

$$U(\theta) = -W(\theta)$$

Práce je definována jako působení síly po dráze. Dráha je zde obvod kružnice a musíme proto pracovat s diferenciály. Tedy

$$dW = 2 \cdot F \cdot ds = 2 \cdot F \cdot \tfrac{1}{2} d \cdot d\theta = M \cdot d\theta$$

Dosadíme a zintegrujeme:

$$W(\Theta) = \int_{\pi/2}^{\Theta} p \cdot E \cdot \sin\theta \cdot d\theta = p \cdot E \cdot \left[-\cos\theta\right]_{\pi/2}^{\Theta} = -p \cdot E \cdot \cos\Theta$$

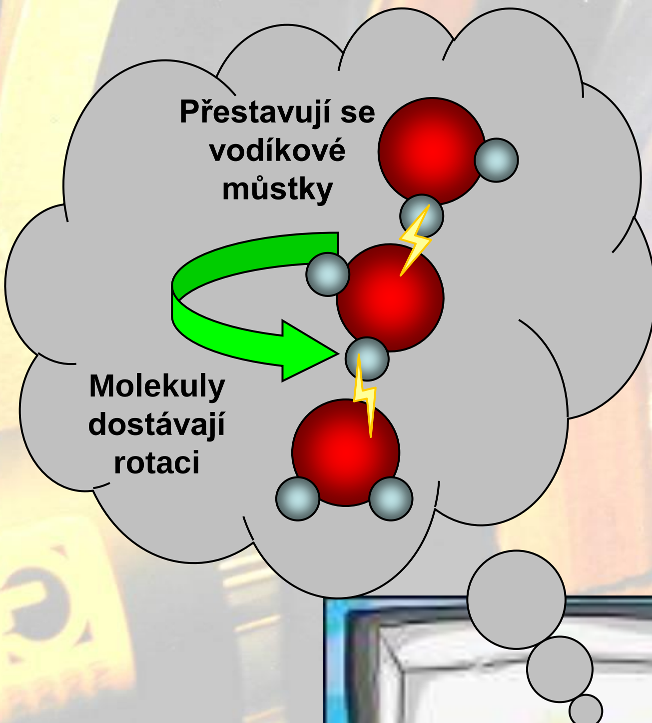
Potenciál dipólu v poli tedy závisí na úhlu vztahem

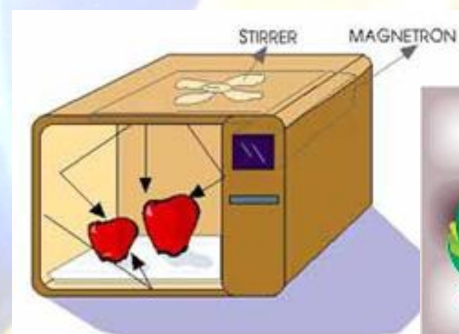
$$\boxed{U(\theta) = p \cdot E \cdot \cos\theta = \vec{p} \cdot \vec{E}}$$

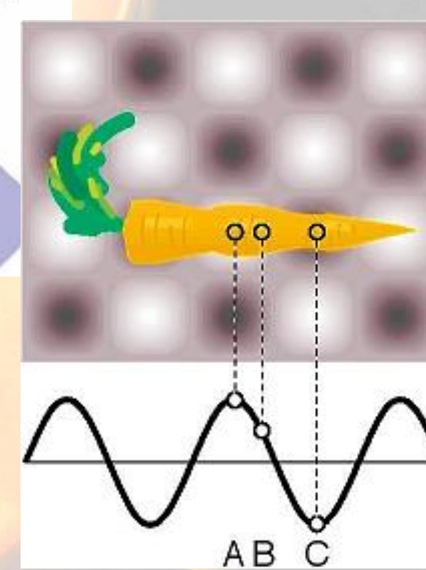
Jak funguje mikrovlnka

Princip mikrovlnné trouby spočívá v působení rychle oscilujícího elektrického pole na dipóly, které tvoří molekuly H_2O. Protože se pole mění, nutí molekuly se otáčet. Při tom se ovšem trhají vodíkové můstky, které normálně molekuly vody svazují a tvoří se jiné, přičemž se rotační pohyb přenáší do pohybu posuvného. Chaotický rej molekul se zvyšuje – a tím roste i průměrná kinetická energie částic a tedy teplota.

Frekvence mikrovlnného stojatého vlnění, které vyplňuje vnitřek trouby je 2.45 GHz, což je optimální hodnota pro roztáčení molekul vody. Z toho také plyne kuchařské poučení, že sušené potraviny v mikrovlnce nelze ohřát. Musí obsahovat vodu.







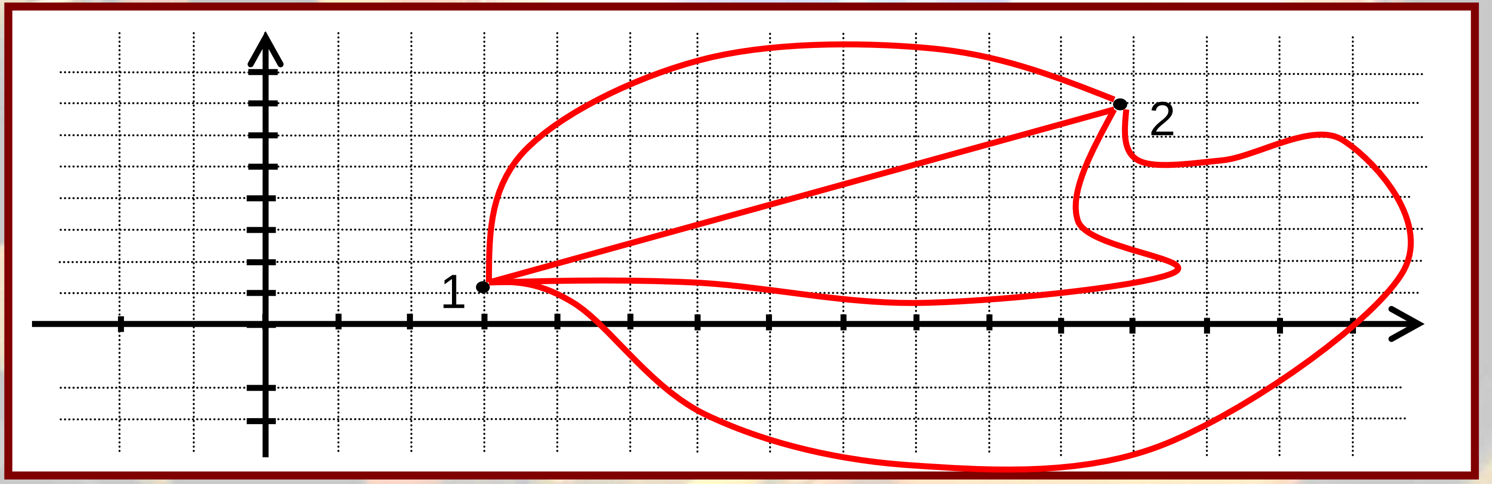
Elektrický potenciál

Elektrickou potenciální energii lze definovat analogickým způsobem jako potenciální energii v gravitačním poli. Vzhledem k silné analogii působících sil

$$F = q \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \qquad\qquad F = m \cdot \kappa \frac{M}{r^2}$$

$$F = q \cdot E \qquad\qquad F = m \cdot g$$

můžeme říct, že elektrické pole přejímá některé vlastnosti pole gravitačního – například potenciální energie závisí výhradně na poloze v poli a nikoliv na cestě, kterou jsme testovací objekt na místo dopravili.



Elektrický potenciál

Elektrická potenciální energie nabité částice v elektrostatickém poli je ale závislá na velikosti jejího náboje. To se nám ale do krámu moc nehodí – je lepší elektrické pole popsat tak, aby tento popis nezávisel na jakýchkoliv vlastnostech vloženého objektu. Proto se definuje *elektrický potenciál* jako potenciální energie vztažená na jednotku náboje:

$$\boxed{\varphi = \frac{E_p}{q}}$$

Elektrický potenciál

Tato veličina rovněž elektrostatické pole popisuje, ovšem nezávisí na náboji částice. Vložíme-li do pole proton (náboj q = 1 e) a α-částici (náboj q = 2e), budou se nacházet ve stejném potenciálu :

$$\varphi_p = \frac{E_{p(p)}}{q_p} = \frac{E}{e} \qquad \varphi_\alpha = \frac{E_{p(\alpha)}}{q_\alpha} = \frac{2E_p}{2e} = \frac{E_p}{e} = \varphi_p$$

Potenciální energii a potenciál nelze zaměňovat! První z nich má rozměr energie (jednotka *J*), zatímco druhá veličina má rozměr energie/náboj (jednotka JC^{-1}). Obdobně by se dal definovat potenciál pro gravitační pole (E_p/m), nicméně se toho neužívá a obvykle se potenciální energie a potenciál pro gravitační pole ztotožňují.

Elektrické napětí

V praxi nás obvykle neznamená absolutní velikost energie, ale pouze rozdíl energií mezi dvěmi stavy. Stejně tak je důležitý rozdíl potenciálu elektrického pole. Proto se definuje veličina

$$\boxed{U = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{E_{p(2)} - E_{p(1)}}{q} = -\frac{W}{q}}$$

Elektrické napětí

Napětí mezi dvěma body je tedy rovno záporně vzaté práci vykonané elektrostatickou silou při přemístění jednotkového náboje mezi těmito body. Může být kladné, záporné či nulové – to závisí na tom, kde zvolíme referenční hladinu $E_p = 0$. Jednotka napětí je Volt :

$$[U] = 1\ \ V = 1\ \ J \cdot C^{-1} = kgm^2 s^{-1} \cdot A^{-1} s^{-1} = kgm^2 s^{-2} A^{-1}$$

Těleso o náboji *1 C* získá při průchodu potenciálovým rozdílem (napětím) o velikosti *1 V* energii rovnou jednomu Joulu, tj. :

$$\Delta E = q \cdot U$$

Elektrické napětí a potenciál

Elektrický potenciál (φ)

Charakterizuje elektrické pole jako takové. Nezávisí na vlastnostech vložených objektů. Vyjadřuje se v jednotkách JC^{-1}. Je třeba explicitně určit. kde má nulovou hladinu.

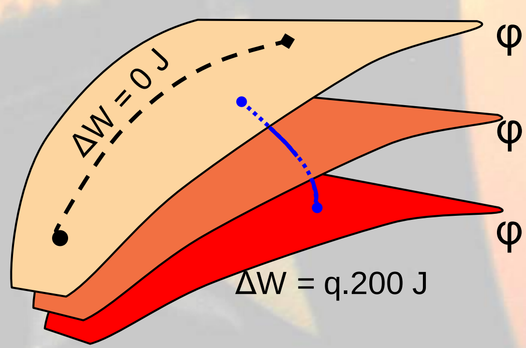
Elektrická potenciální energie (E_p)

Energie nabitého tělesa vloženého do pole. Závisí na náboji tělesa. Vyjadřuje se v jednotkách *J*.

Elektrické napětí (U)

Popisuje rozdíl potenciálů pole ve dvou bodech. Vyjadřuje se v jednotkách $V = JC^{-1}$.

Množiny body, ve kterých má potenciál stejnou hodnotu, nazýváme ekvipotenciální plochy (jsou obdobou vrstevnic). Mezi dvěmi body na ekvipotenciální ploše je nulové napětí a přesun částice podél plochy vyžaduje nulovou práci.



φ = 300 V

φ = 200 V

φ = 100 V

U = 100 V

U = 100 V

U = 200 V

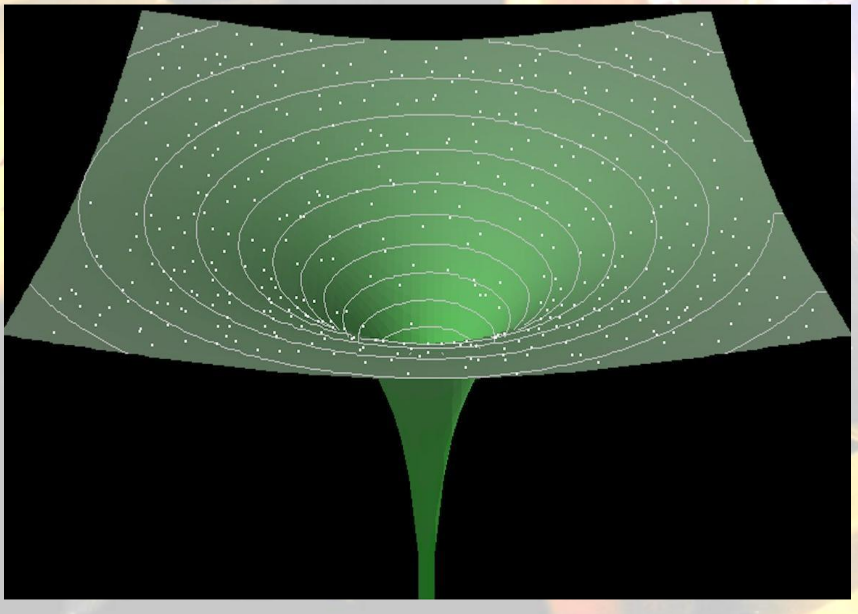
$$\Delta W = q \cdot U$$

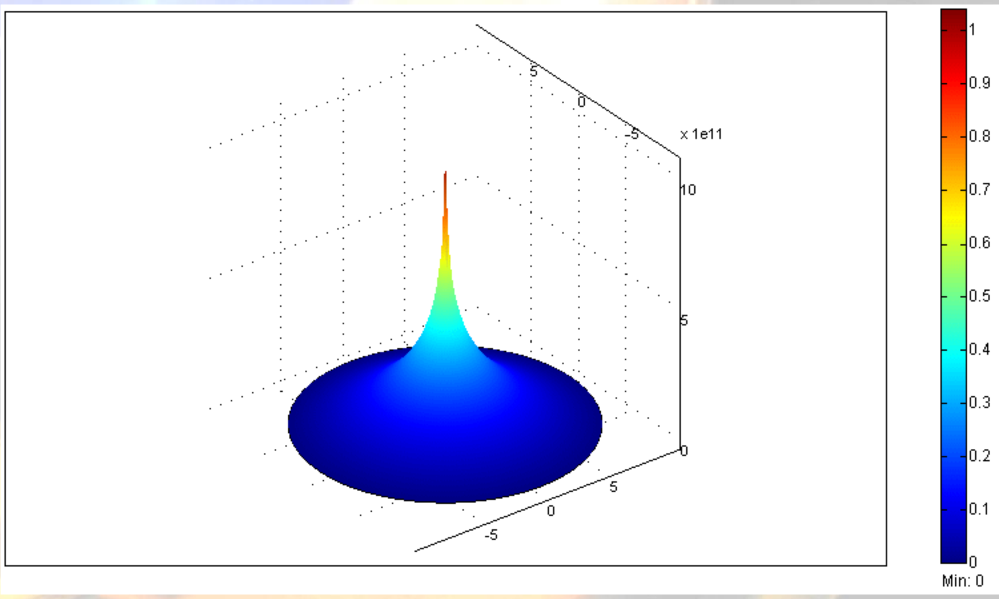
Elektrické napětí a potenciál

Speciálně pro bodový náboj platí:

$$F = q \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad F = q \cdot E$$

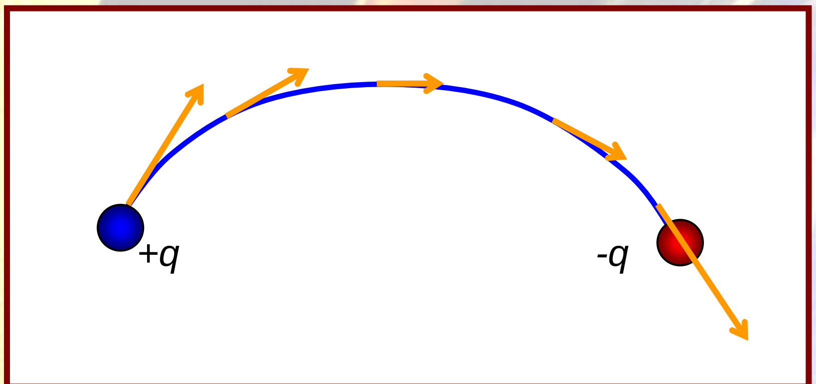
$$E_p = q \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \quad \Rightarrow \quad E_p = q \cdot \varphi$$



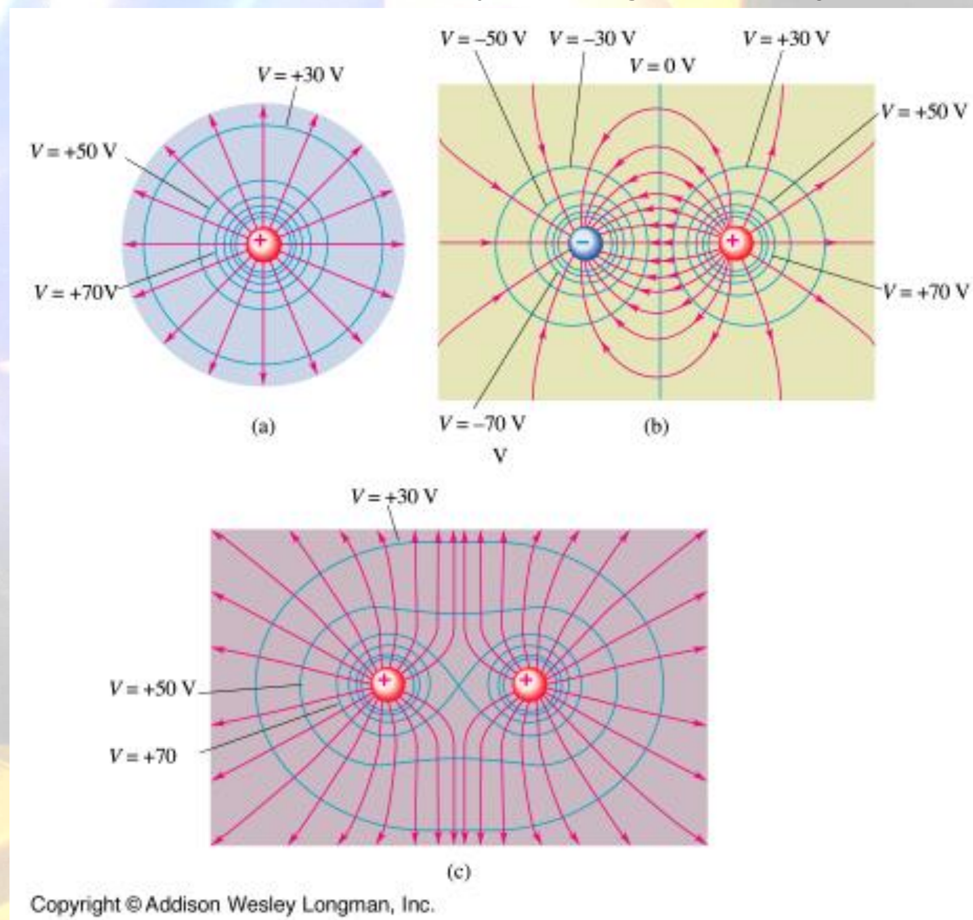


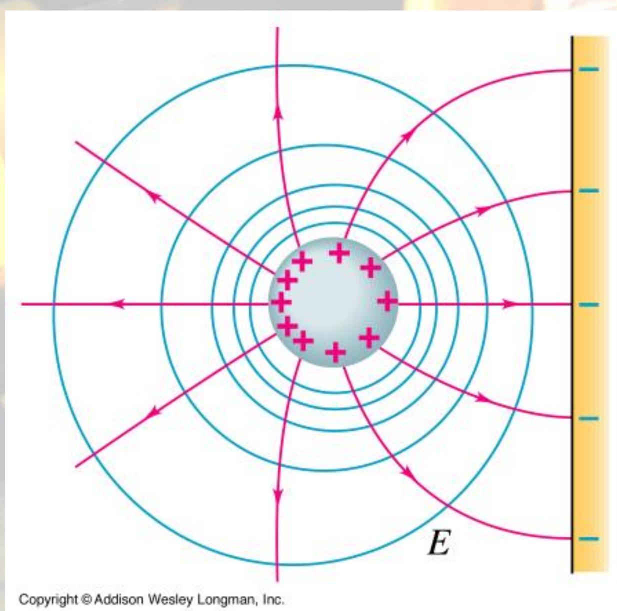
Elektrické napětí a potenciál

Ekvipotenciální plochy jsou v každém bodě kolmé na siločáry – tj. křivky, jejíž průběh určuje gradient pole (intentzita) v každém bodě.



Boční průřez ekvipotenciálami a jejich srovnání se siločarami u různých konfigurací nábojů.

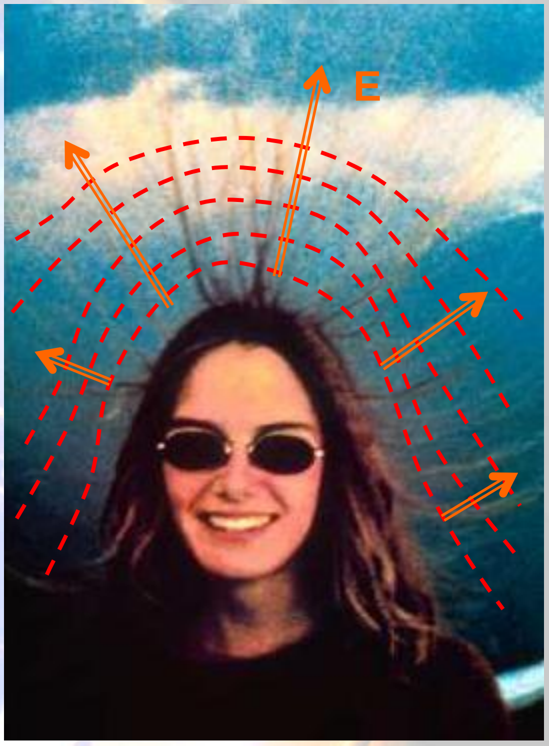




http://www.physics.sjsu.edu/becker/physics51/elec_charge.htm

Elektrické napětí a potenciál

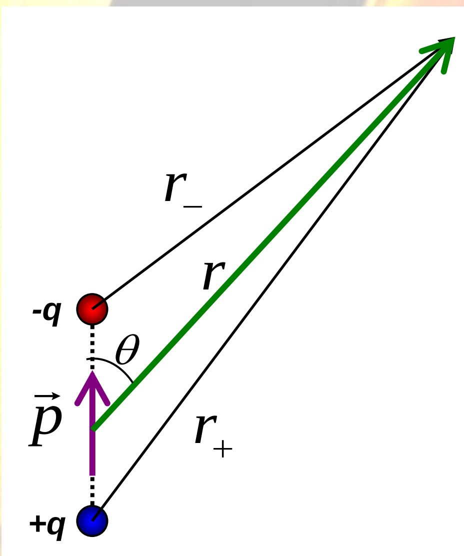
Odhadnete tvar elektrostatického pole kolem hlavy ženy (vektory intenzity a ekvipotenciály)?



Potenciál dipólu

Potenciál dipólu je rovněž snadné spočítat :

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

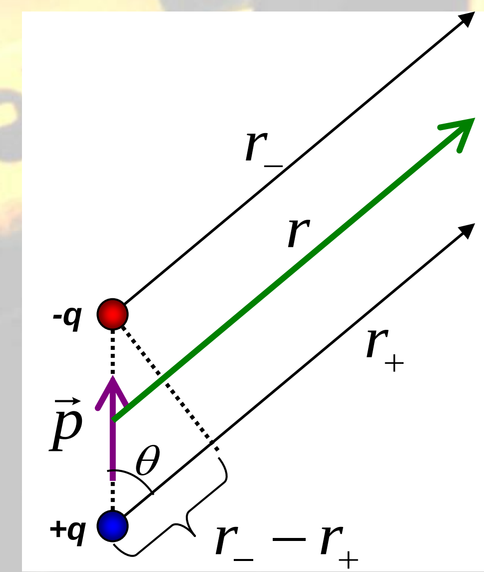


Délky r_+ a r_- lze dopočítat například z délky *r* a úhlu vektorů *r* a *p=e.d* (kosinová věta). Zajímavá je otázka, jaká je situace, jsme-li od dipólu značně vzdáleni, tj. *r* >> *d* (například zkoumáme-li molekuly). Potom platí (viz obrázek) :

$$r_- - r_+ = d\cdot\cos\theta = \frac{p}{q}\cdot\cos\theta \qquad r_-\cdot r_+ = r^2$$

a po dosazení

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{p}{q}\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cdot\cos\theta}{r^2}$$



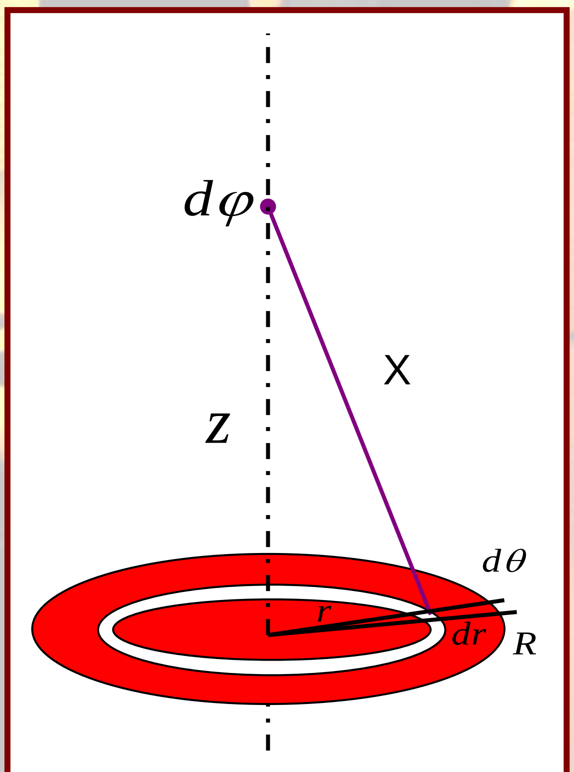
Jako dipól se mohou chovat nejen molekuly s polárními vazbami, ale dokonce i nepolární, vložíme-li je do vnějšího elektrického pole. Jeho vlivem se střední poloha všech kladných nábojů mírně odchýlí od střední polohy záporných nábojů a vznikne tak dipól. Po odstranění vnějšího pole opět zanikne. Takto vzniklému dipólovému momentu říkáme *indukovaný*.

Potenciál spojitě rozloženého náboje

Chceme-li spočítat potenciál složitějších útvarů, je třeba sáhnout po integrálním počtu. Objekt rozsekáme na infinitezimální dílky, jejichž náboj pokládáme za bodový a v diferenciálech potom máme

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r}$$

Nekonečný počet nekonečně malých dílků pak posčítáme integrálem. Například potenciál na ose rovnoměrně nabitého disku bychom spočítali následovně:



$$dq = \frac{r \cdot d\theta \cdot dr}{\pi R^2} \cdot q$$

nábojový zlomek je úměrní podílu plochy vybraného kousku kruhu a plochy celého kruhu

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{X} \cdot \frac{r \cdot d\theta \cdot dr}{\pi R^2} \cdot q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot r \cdot d\theta \cdot dr}{\pi R^2 \sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r \cdot dr \cdot d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\pi q}{\pi R^2} \int_0^R \frac{r \cdot dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{R^2} \int_0^R \frac{du}{2\sqrt{u + z^2}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \left[\sqrt{u + z^2}\right]_0^R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z\right)$$

Výpočet intenzity ze zadaného potenciálu

Chceme-li spočítat intenzitu ze známého potenciálu, je třeba si uvědomit, jak jsou intenzita, potenciál a energie pole definovány a svázány:

$$\varphi = \frac{E_p}{q} \qquad \vec{F} = q \cdot \vec{E} \qquad U = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{E_{p(2)} - E_{p(1)}}{q} = -\frac{W}{q}$$

Jelikož jsme již dříve v mechanice definovali, že

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\nabla E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z} \right)$$

zjistíme dosazením, že

$$q \cdot \vec{E} = -q \cdot \operatorname{grad} \frac{E_p}{q} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \operatorname{grad} \varphi$$

Máme-li homogenní pole, potom je případ jednorozměrný a gradient přechází v derivaci, tedy :

$$E = \operatorname{grad} \varphi = \frac{d\varphi}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x) = Ex + konst.$$

z čehož plyne

$$U = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = E \cdot x_2 - E \cdot x_1 = E \cdot (x_2 - x_1) = E \cdot l \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{U}{l}$$

Potenciál spojitě rozloženého náboje

Potenciál a intenzita pole je spolu svázána stejně, jako potenciální energie a síla – tedy gradientem. Platí, že

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p = -\nabla E_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}, \frac{\partial E_p}{\partial y}, \frac{\partial E_p}{\partial z} \right)$$

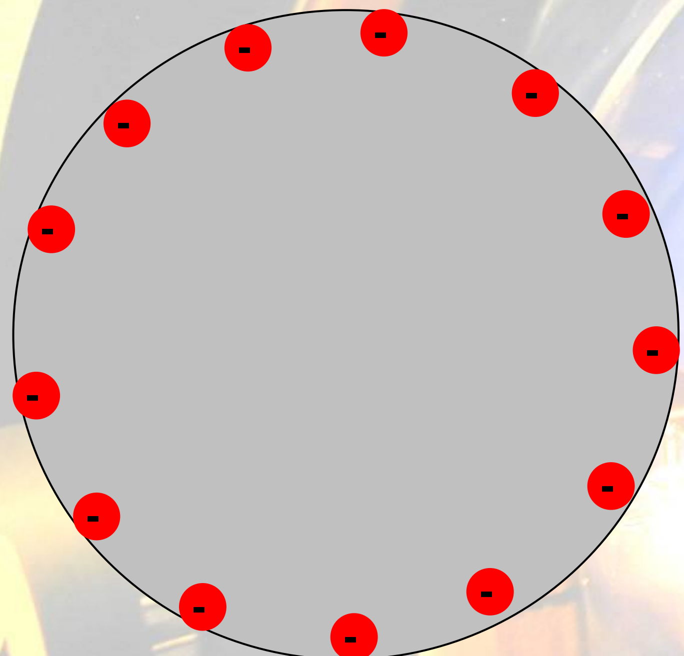
$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

Tak můžeme snadno získat intenzitu ze známého potenciálu, například v ose kotouče bude vektor intenzity roven

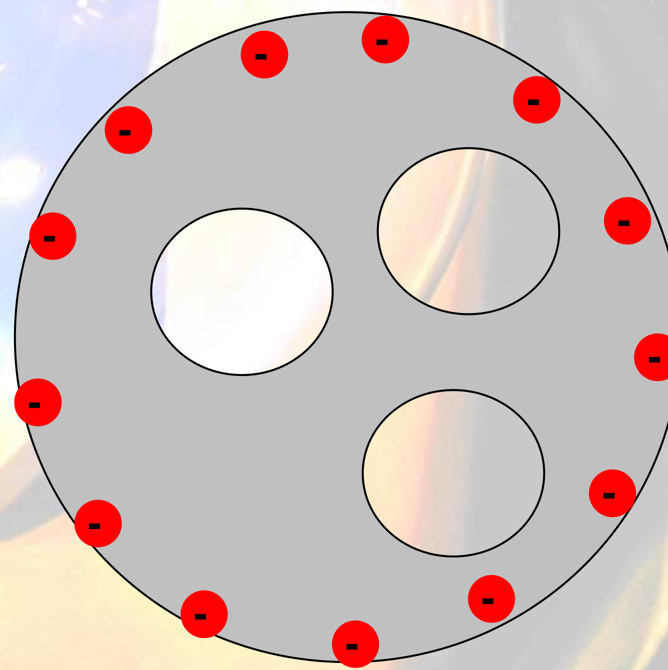
$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right) \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \left(0{,}0{,}1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Náboje ve vodiči

Jaké je rozložení elektrických nábojů ve vodiči – tedy v prostředí, ve kterém se mohou volně pohybovat?

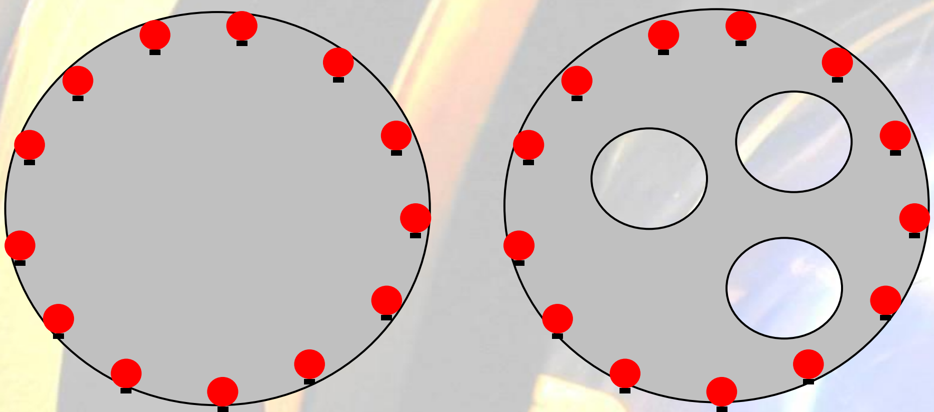


Lze ukázat, že náboje se ve vodiči vždy rozmístí po vnějším povrchu. Důkaz je možné provést pomocí Gaussova zákona elektrostatiky, nicméně po kratším zamyšlení na to přijdeme i za pomocí ZSL – elektrony se rozmístí tak, aby od sebe navzájem byly co nejdále – odpuzují se navzájem.

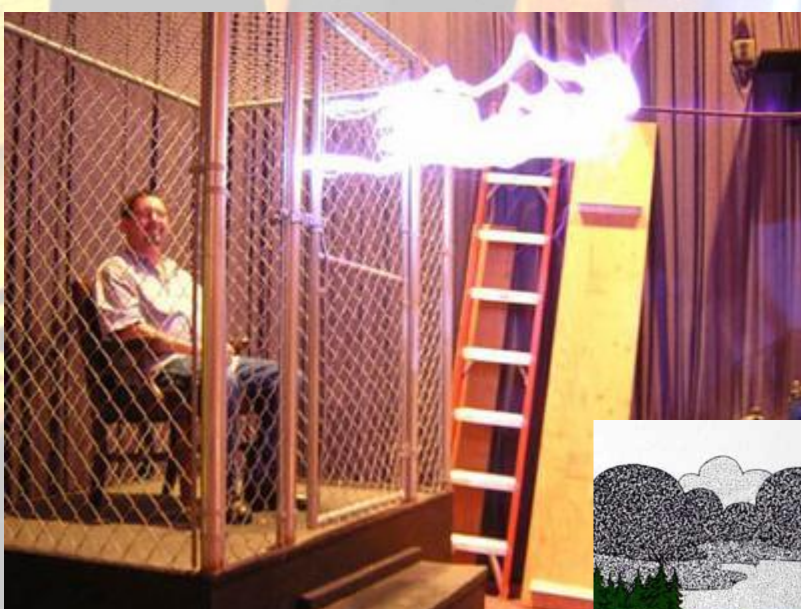


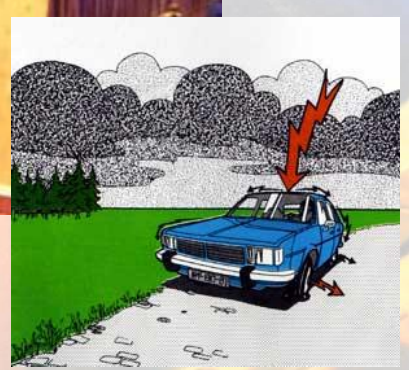
Důsledek tohoto faktu je ten, že elektrostatické pole uvnitř vodiče je v celém objemu nulové.

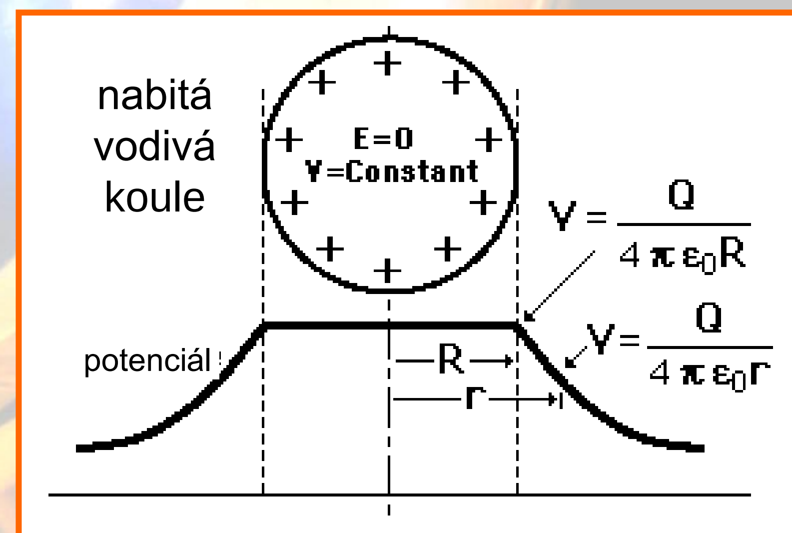
Potenciál nabitého vodiče



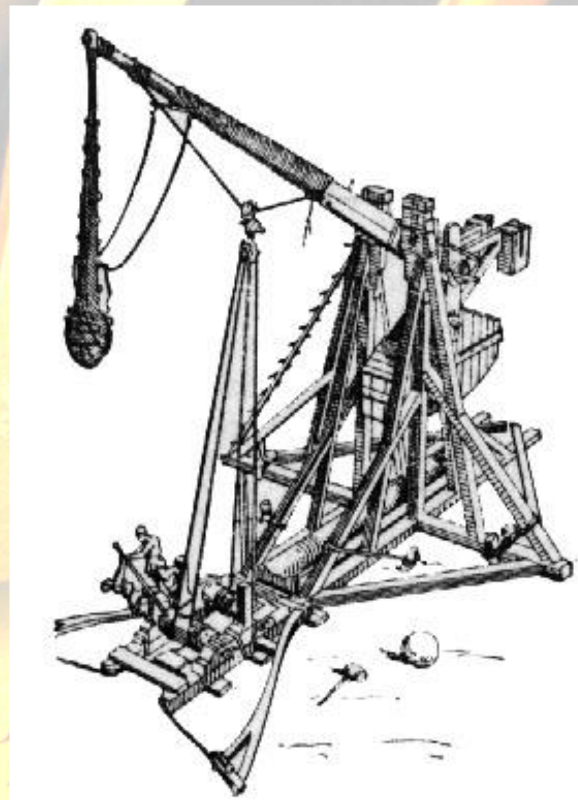
Protože náboj na vodiči je vždy spojitě rozprostřen po povrchu, je uvnitř vodiče nulová intenzita elektrického pole, nehledě na to, zda jsou uvnitř dutiny či ne. Potenciál v celém objemu je tedy konstantní.Na povrchu se intenzita skokem mění, ovšem jelikož potenciál je z intenzity odvozen integrací, musí v tomtéž bodě být spojitý. Tedy i na povrchu vodiče je všude konstantní potenciál - povrch vodiče je ekvipotenciální plocha. Přesouvat náboje po povrchu vodiče tedy nestojí žádnou práci – všechny body ve vodiči mají mezi sebou stejné (nulové) napětí.







Kondenzátory

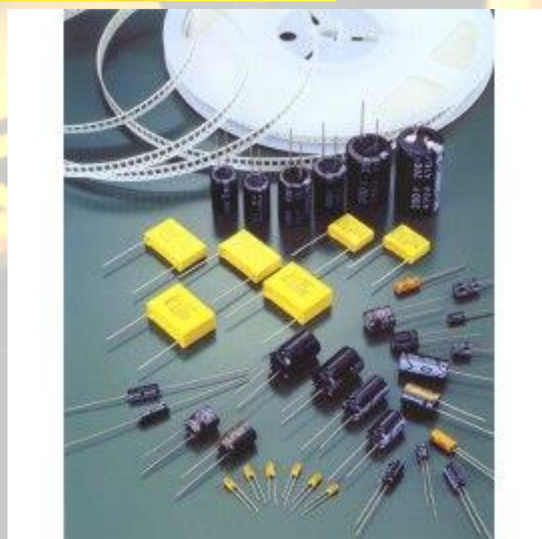


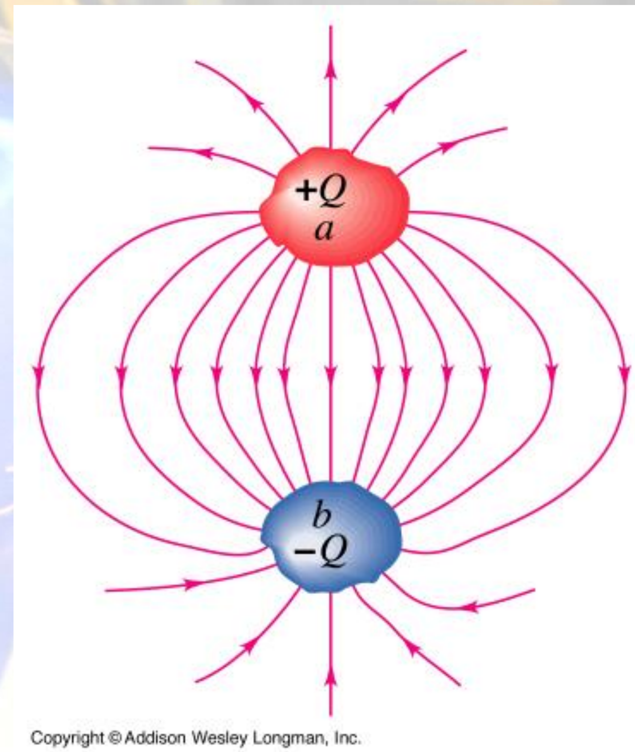
Uchovávat mechanickou energii za pomoci gravitačního pole umíme. Je možné něco podobného udělat za pomoci pole elektrického?

Dlouhé stráně, Jeseníky

Kondenzátory

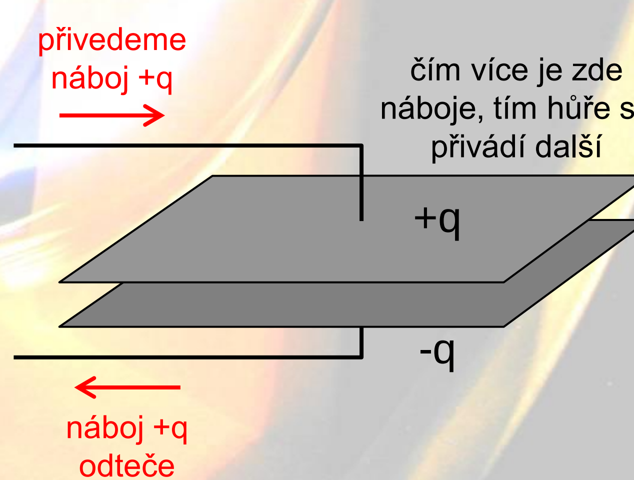
Pro uskladnění energie za užití elektrostatického pole slouží součástka nazvaná kondenzátor. Její princip je velmi jednoduchý – skládá se pouze ze dvou izolovaných vodičů. Pokud na jeden přivedeme náboj, nabije se druhý vodič opačně. Přivádění dalšího náboje vyžaduje práci, neboť překonáváme pole dříve uloženého náboje.





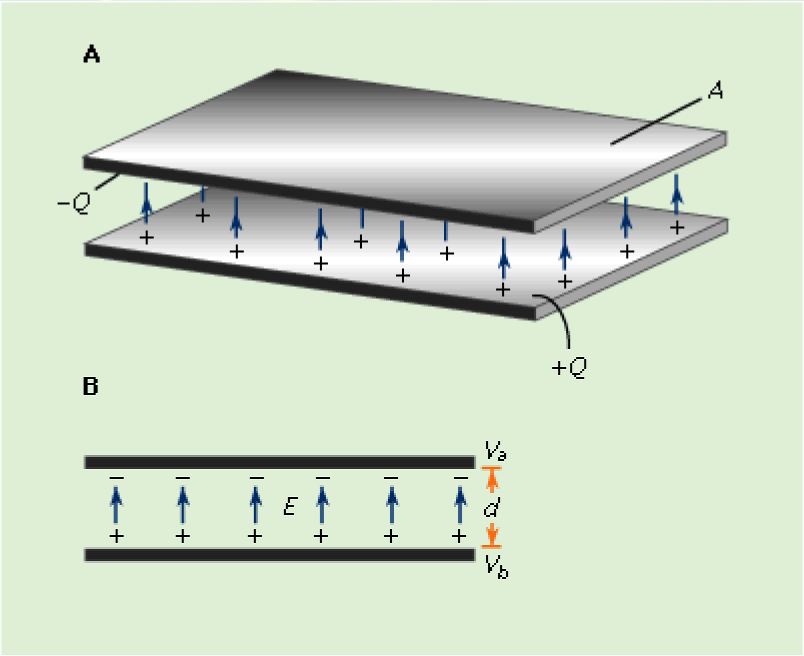
Vodiče můžou mít obecně různé tvary, ovšem nejnázornější tvar pro výpočty jsou dvě desky stejného obsahu umístěné rovnoběžně blízko u sebe.

Nabitý kondenzátor má na jedné desce náboj +*q*, na druhé –*q*, neboť souhlasné náboje jsou polem z protější desky vytlačeny. Celkový náboj kondenzátoru je sice nula, říkáme ale, že je nabitý na náboj *q*.



Kondenzátory

V nabitém kondenzátoru se vytvoří elektrické pole a tedy potenciálový rozdíl. Mezi deskami, které jsou ekvipotenciální plochy, tedy existuje napětí. Toto napětí je přímo úměrné přivedenému náboji. Konstanta úměrnosti mezi nábojem a napětí se nazývá kapacita a závisí na geometrickém uspořádání elektrod a materiálu mezi nimi :



$$\boxed{q = C \cdot U}$$

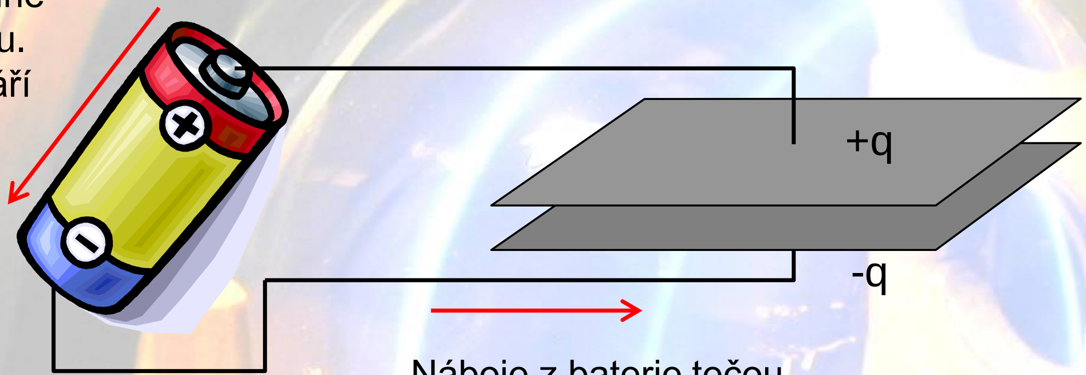
Čím větší je kapacita kondenzátoru, tím větší náboj je třeba přivést na elektrody, abychom dosáhli požadovaného napětí – a tím větší je třeba vynaložit práci. Kapacita tedy popisuje schopnost kondenzátoru uchovávat energii – větší kapacita, více energie. Jednotka kapacity je

$$[C] = \left[\frac{q}{U}\right] = C \cdot V^{-1} = C \cdot (JC^{-1})^{-1} = JC^{-2} = kgm^2 s^{-4} A^{-2} = F$$

což se označuje jako 1 Farad (*F*). V technické praxi je tato jednotka příliš velká, obvykle se setkáme s kondenzátory s kapacitou v řádu pikofaradů až mikrofaradů.

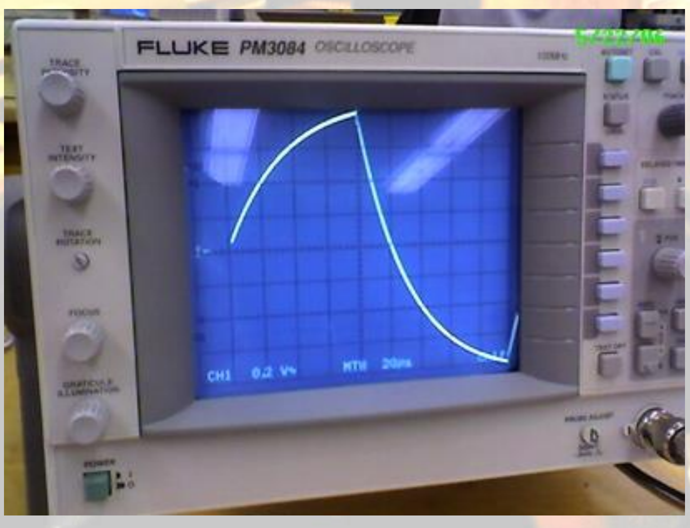
Nabíjení kondenzátoru

Baterie je zařízení, které elektrochemicky přenáší náboje z jedné elektrody na druhou. Tím mezi nimi vytváří napětí.

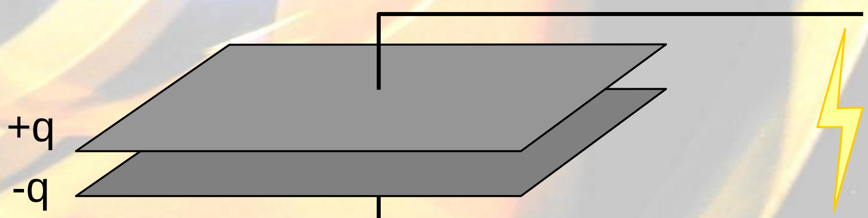


Nové náboje mohou přitékat až do té chvíle, kdy se napětí na kondenzátoru a na baterii vyrovnají. Pak se navzájem vyruší a přísun dalšího náboje ustává.

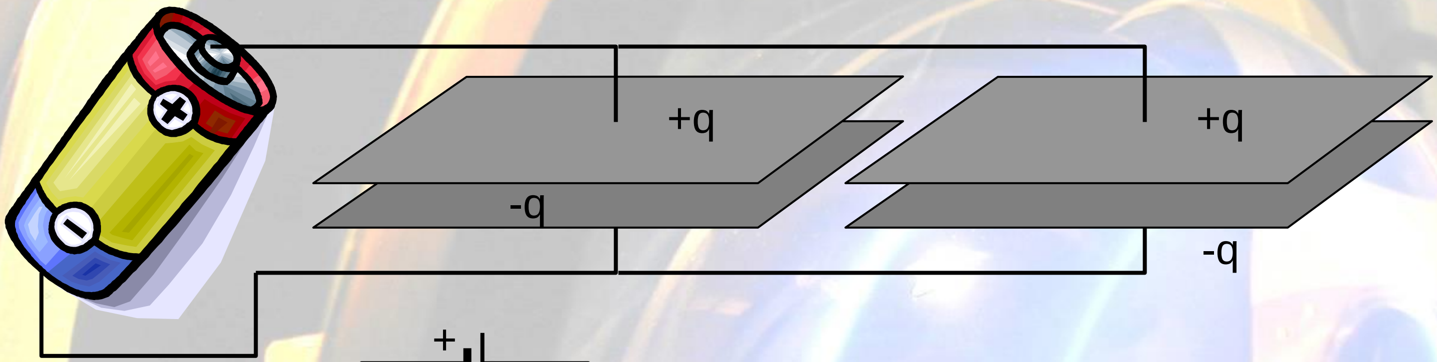
Náboje z baterie tečou do kondenzátoru. Shromážděný náboj vytváří elektrické pole, které další příchozí elektrony odpuzuje.



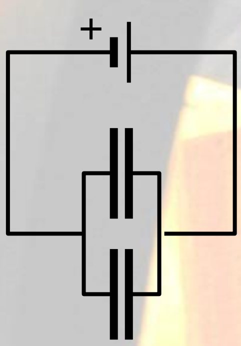
Odpojený nabitý kondenzátor vloženou energii uchová (alespoň po nějakou dobu). Během tohoto času ji lze využít na konání užitečné práce.



Paralelní a sériové zapojení kondenzátorů

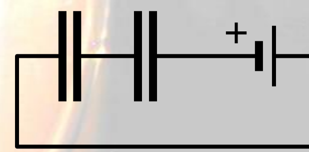


Paralelně (vedle sebe) zapojené kondenzátory sčítají své kapacity. Kapacita závisí na lineárně ploše elektrod, a na dva takto spojené kondenzátory se můžeme dívat jako na jeden s dvojnásobnými plochami elektrod.



$$C = \sum_i C_i = C_1 + C_2$$

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

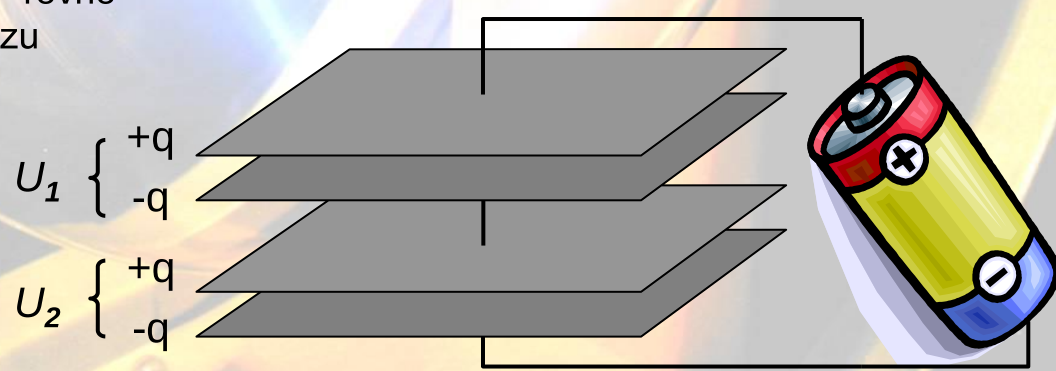


Pro sériově (za sebou) zapojené nabité kondenzátory musí platit, že napětí dodávané baterií je rovno součtu napětí na obou kondenzátorech. Z výrazu

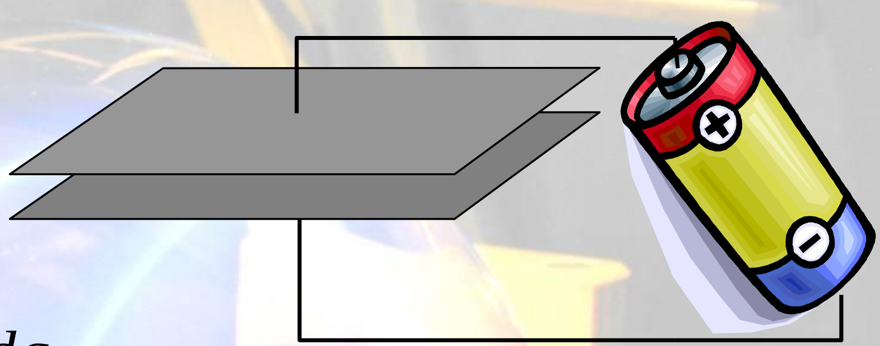
$$U = U_1 + U_2$$

okamžitě získáme

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$



Energie nabitého kondenzátoru



Spočítejme nyní, jak velká energie je vlastně v nabitém kondenzátoru uložena. Práce, která byla při nabíjení vykonána, je nyní uložena ve formě elektrostatické potenciální energie mezi deskami kondenzátoru. Diferenciál této práce (nekonečně malá část) je možný vyjádřit jako

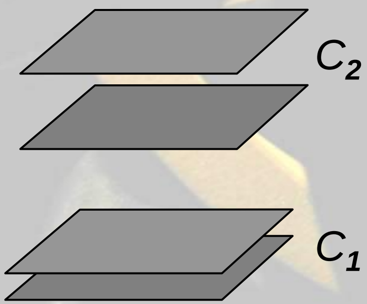
$$E_p = q \cdot U \qquad \Rightarrow \qquad dW = U \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$

neboť předpokládáme, že během přidávání infinitezimálního náboje *dq* se aktuální náboj *q* na kondenzátoru nemění (změní se až potom o *dq*). Diferenciální výraz zintegrujeme a získáme

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q \quad dq = \frac{1}{C} \left[\tfrac{1}{2} q^2 \right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

kde *Q* je celkový náboj, který jsme do kondenzátorů nacpal a *W* celková práce, která na to byla potřeba. A jelikož náboj vyjádřit jako *Q = C.U*, platí, že potenciální energii kondenzátoru lze zapsat takto :

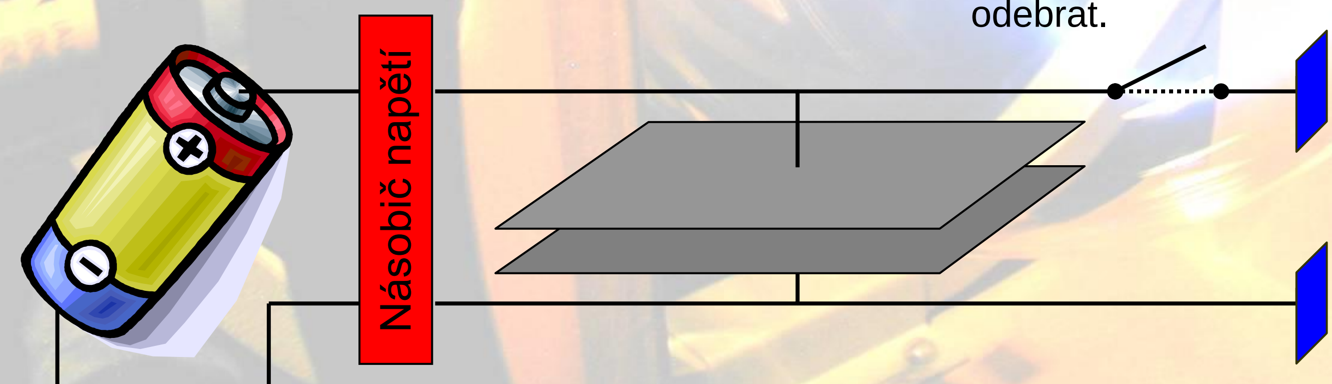
$$E_p = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2$$



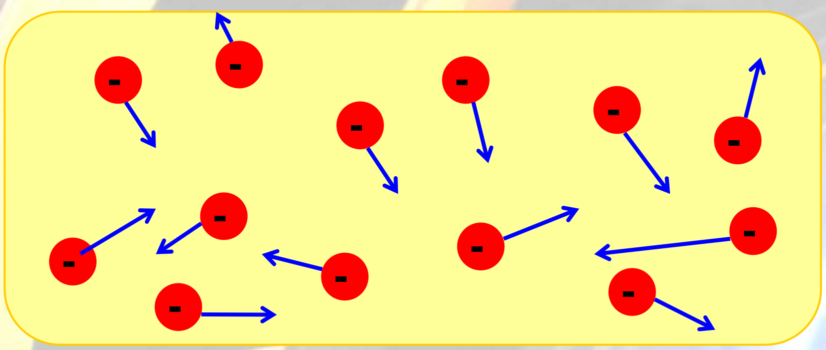
Lze spočítat, že kapacita deskového kondenzátoru je přímo úměrná ploše desek a nepřímo úměrná vzdálenosti mezi nimi. Proto má-li kondenzátor C_2 dvakrát menší kapacitu než C_1 a oba mají stejný náboj, plyne z předchozí rovnice, že C_2 uchovává dvakrát větší energii než C_1. Při zanedbání okrajových efektů lze ovšem ukázat, že intenzita pole je v obou kondenzátorech stejná *($E=Q/\varepsilon_0 S$)*. To vše nás vede k závěru, že energii uchovává pole v objemu mezi elektrodami (2x větší objem při intenzitě *E* – 2x větší energie).

Energie nabitého kondenzátoru

Během komorové fibrilace přestane srdce pumpovat krev, protože stahy jednotlivých svalových skupin přestanou být koordinovány. Je možné koordinaci obnovit elektrickým impulzem o vysokém proudu, který skrz hrudní dutinu musí přenést energii cca 100 J v době asi 2 ms. To odpovídá výkonu 100 kW, což je skoro malá elektrárna – běžná baterie nic takového nezvládne. Je třeba energii nejprve postupně uložit do kondenzátoru a pak ji najednou odebrat.

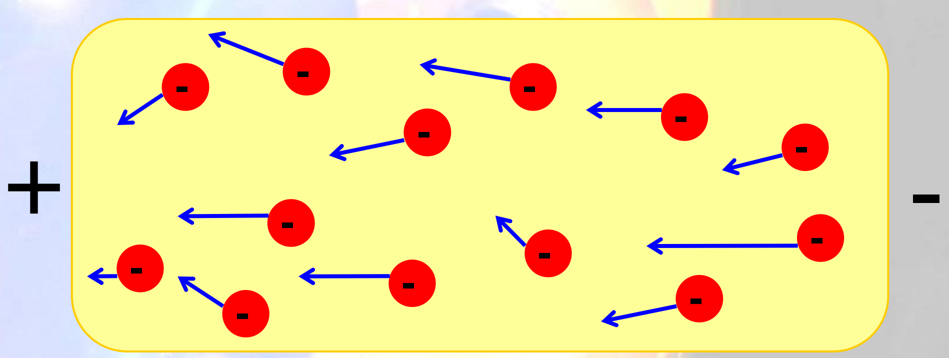


Elektrický proud



Elektrony ve vodiči mají tendenci chaoticky se pohybovat. Směry jsou náhodné a rychlosti závisí na teplotě. Průměrné rychlosti se pohybují kolem $10^{6}\ ms^{-1}$.

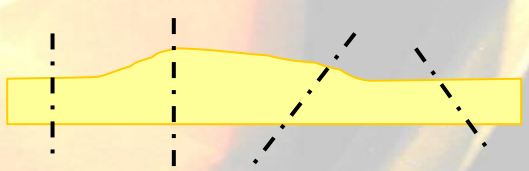
Přiložíme-li na konce vodiče napětí, vzniklé pole začne elektrony urychlovat jedním směrem – objeví se tok náboje (drift). Driftová rychlost elektronů ve vodiči je cca $10^{-5}\ ms^{-1}$.



Toku jakýchkoliv nabitých částic se říká elektrický proud a je definován jako počet nábojů, které projdou danou plochou za jednotku času :

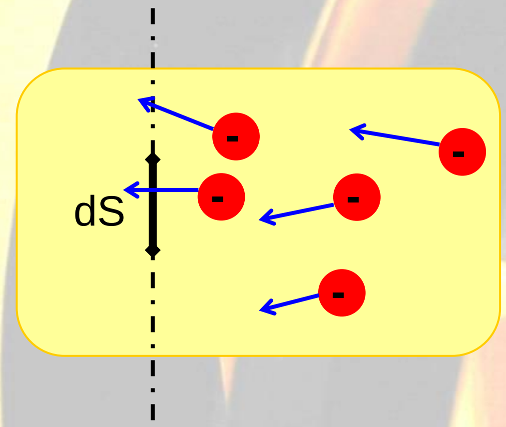
$$I = \frac{dq}{dt} \qquad [I] = A$$

Pozn. : při ustáleném proudu je tok libovolným průřezem vodiče vždy stejný – náboj se zachovává. Je to podobné jako se zahradní hadicí, kterou proudí voda.



Hustota proudu

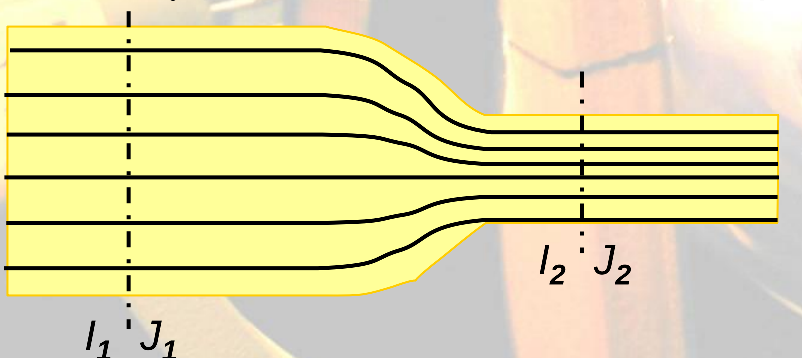
Ujasněme si pojem *hustota proudu*. Tu získáme, sledujeme-li infinitezimální plošku v průřezu vodiče a zaznamenáváme náboj, který jí prošel :



Nosič náboje se pohybuje v každém bodě směrem, kterým míří intenzita elektrického pole. Hustota proudu je pak vektorová veličina, která má stejný směr jako proud (a tedy *E*) v daném bodě a velikost jako velikost proudu tekoucí ploškou dělená obsahem plošky:

$$J = \frac{dI}{dS}$$

Pro velikost proudu pak platí $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$ a pokud je proud vodiči všude stejný, pak $I = J \cdot S$. elektrický proud skrz vodič lze zakreslit pomocí proudových čar takto :



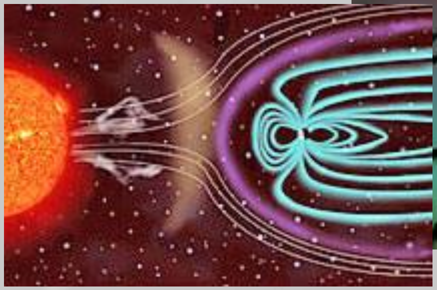
$$I_1 = I_2$$

$$J_1 < J_2$$

Pozn. : běžný vodič zapojený do obvodu zůstává jako celek elektricky neutrální. V tomto případě tedy nic nenutí proud téct po povrchu, jak tomu bylo v případě Faradayovy klece. Opět jiná situace nastává, pokud se elektrické pole rychle mění nebo pokud vodič není z homogenního materiálu. Vysokofrekvenční proudy tečou po povrchu objektů.

Elektrický proud

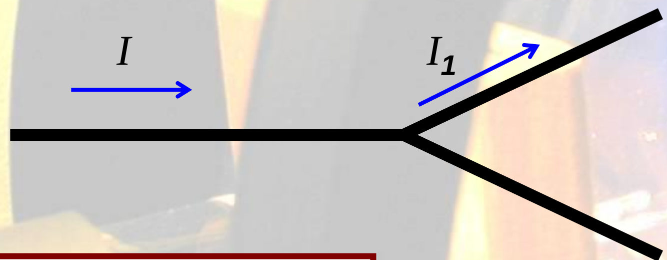
Elektrický proud nemusí téct jen ve vodiči – jakýkoliv proud nabitých částic je elektrický proud.



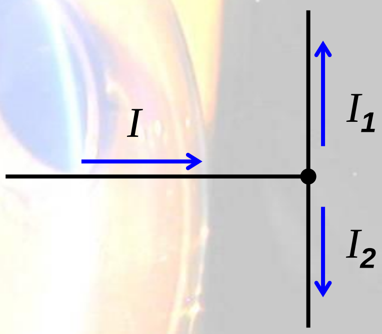
Elektrický proud

Pokud se vodič pod napětím rozděluje, rozdělí se i ustálený proud. Protože ale platí zákon zachování elektrického náboje, musí platit

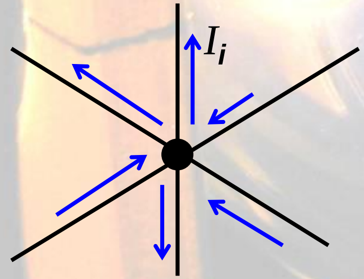
$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d(q_1 + q_2)}{dt} = \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} = I_1 + I_2$$



Pozn. : kreslíme-li náčrt elektrického obvodu či zařízení, vodivé spojení vodičů značíme tečkou a nazýváme uzel. Pozn. : i když značíme proud šipičkami, jedná se o skalární veličinu!



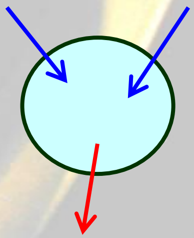
Gustav Robert Kirchhoff
1824 - 1887



1. Kirchhoffův zákon : Tuto vlastnost proudu popsal roku 1845 německý fyzik Gustav Kirchhoff. Proud, který vstupuje do uzlu z něj zase musí vystoupit a celkový proud v uzlu je tedy nulový. Pro zajímavost - zákon lze mnohem sofistikovaněji vyslovit jako

$$\sum_i I_i = 0$$

$$\operatorname{div} J = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$



kde J je hustota proudu a ρ hustota náboje.

Odpor

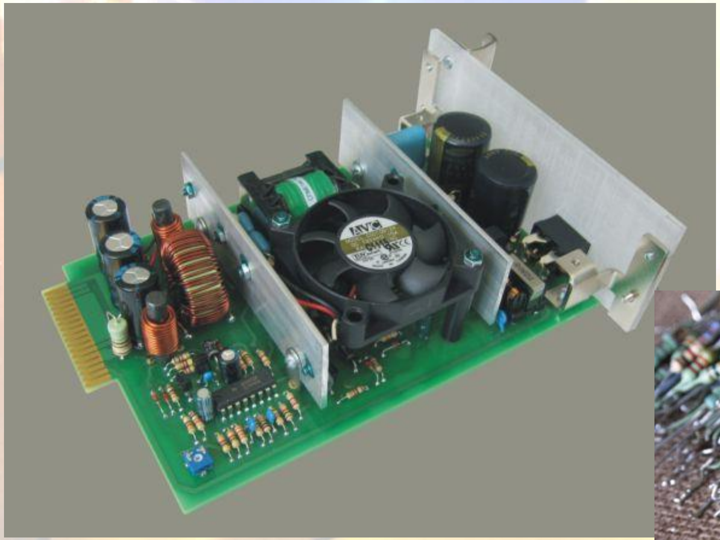
Přiložíme-li stejné napětí ke koncům měděného drátu a skleněné tyče, změříme úplně jiné proudy. Jak dobře materiál vede elektrony (a tedy elektrický proud) se dá vyjádřit veličinou *elektrický odpor*. V nejjednodušším případě je elektrickému proud přiloženému napětí přímo úměrný a definuje se

$$U = R \cdot I \qquad [R] = VA^{-1} = \Omega$$

Georg Simon Ohm
1789-1854

Elektrický odpor R má jednotku Ohm (Ω). Je pojmenovaná po německém fyzikovi Georgu Ohmovi, který tuto přímou úměru pro běžné vodiče roku 1827 popsal. Vztahu se říká Ohmův zákon.

Součástce, která klade proudu přesně definovaný odpor, se říká rezistor. Elektrický odpor má však za běžných podmínek každý vodič.



značka rezistoru

Odpor vodiče

Odpor vodiče závisí nejen na materiálu, ale i na jeho geometrických rozměrech. Zaveďme si tedy veličinu, která na rozměrech nezávisí, ale je konstantou daného materiálu:

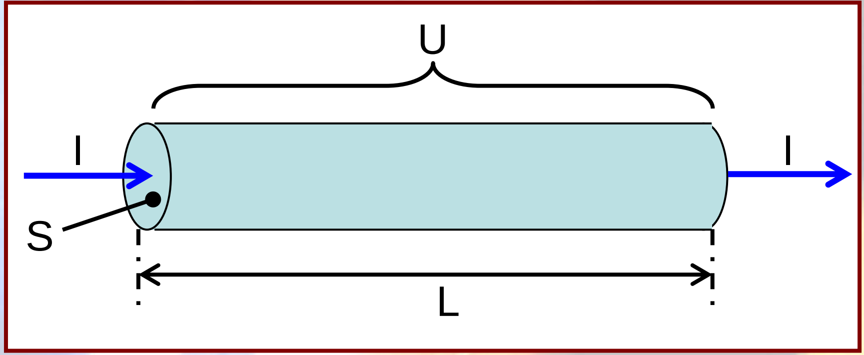
$$\rho = \frac{E}{J} \qquad [\rho] = \frac{Vm^{-1}}{Am^{-2}} = \frac{V}{A}m = \Omega \cdot m$$ rezistivita

Srovnáme-li tuto jednotku s definicí odporu $R = U/I$, vidíme jistou podobnost. Zatímco ale veličiny *I* a *U* jsou vázány na daný vodič, veličina *E* je určena pouze vnějšími podmínkami a *J* závisí na materiálu, ne však na rozměrech vodiče.

Materiál	ρ [Ωm]
stříbro	1.62×10^{-8}
měď	1.69×10^{-8}
hliník	2.75×10^{-8}
wolfram	5.25×10^{-8}
železo	9.68×10^{-8}
platina	10.6×10^{-8}
křemík	2.5×10^{3}
sklo	$\approx 10^{10}$-10^{14}
křemen	$\approx 10^{16}$

$$E = \frac{U}{L}, \quad J = \frac{I}{S}$$

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{U/L}{I/S}$$

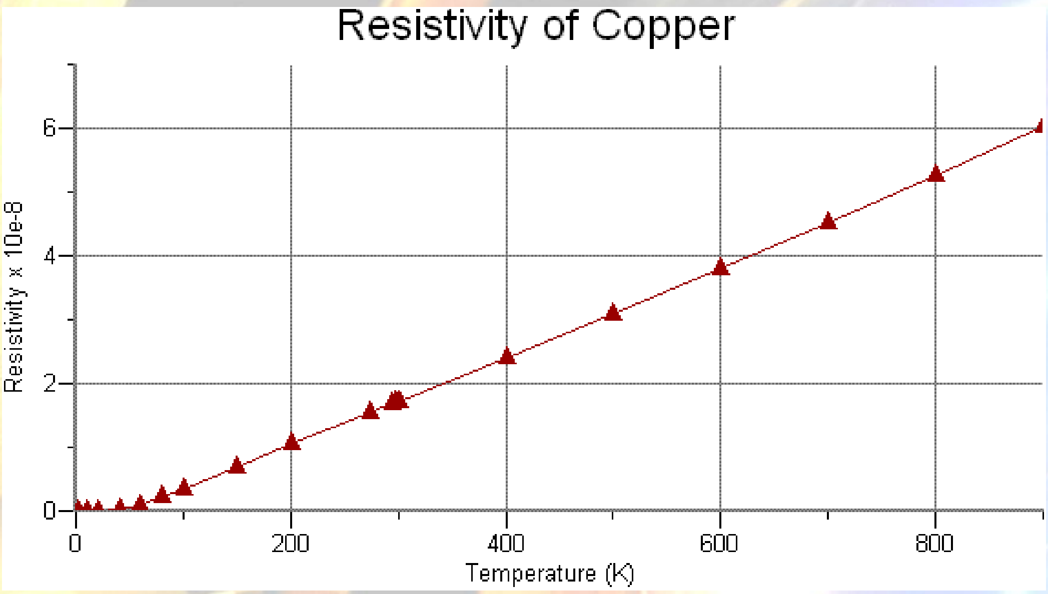


$$\rho = \frac{U/L}{I/S} = \frac{U}{I} \cdot \frac{S}{L} = R \cdot \frac{S}{L} \qquad \Rightarrow \qquad R = \rho \cdot \frac{L}{S}$$

Předpokládáme-li, že proud je ve vodiči z neměnným průřezem rozložen homogenně, pak zjistíme, že odpor je přímo úměrný rezistivitě a délce vodiče, a nepřímo úměrný průřezu vodiče.

Odpor vodiče

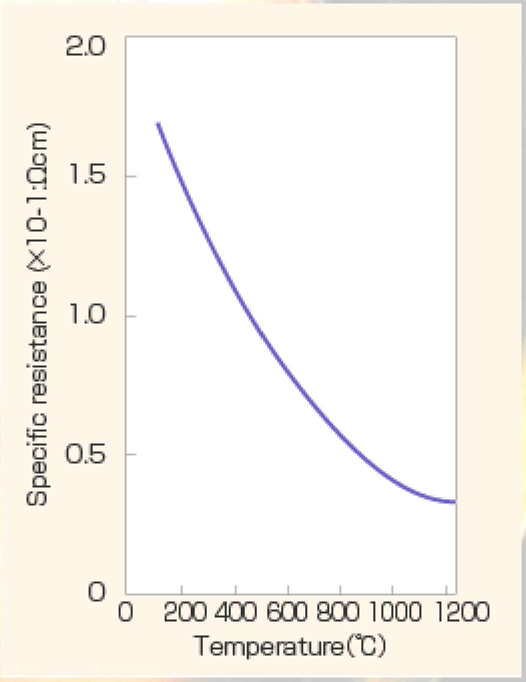
Odpor obecně závisí na teplotě. U běžných vodičů roste s teplotou, u polovodičů naopak s teplotou klesá.



Vztah pro závislost rezistivity na teplotě lze pro kovy aproximovat lineárním vztahem

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

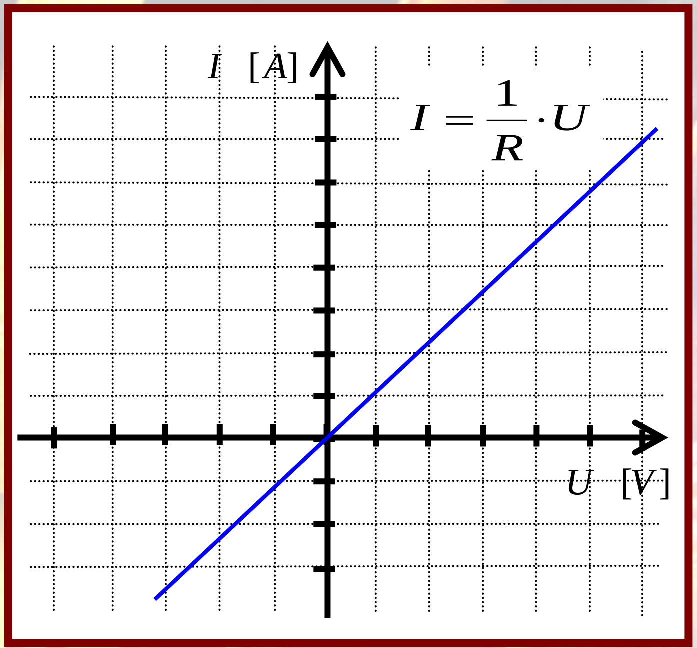
kde α je experimentálně určený teplotní součinitel rezistivity.



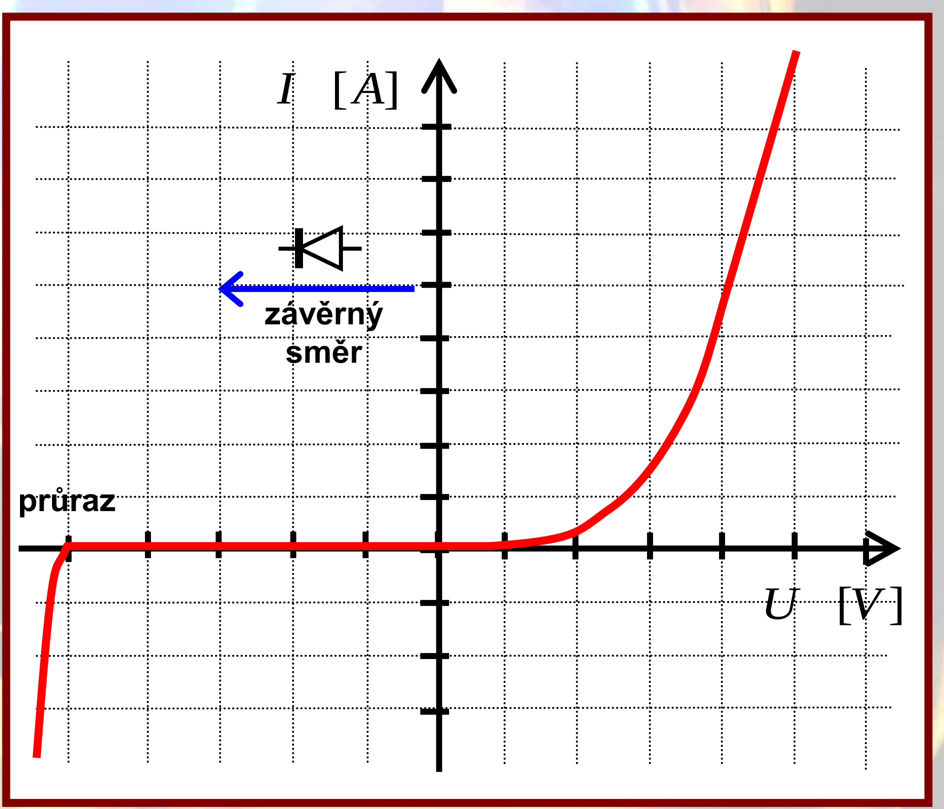
V polovodičích je za nízkých teplot minimum volných nábojů, tvořících při přiložení napětí elektrický proud. jejich počet vzrůstá při vyšších teplotách – materiál tedy vede proud lépe.

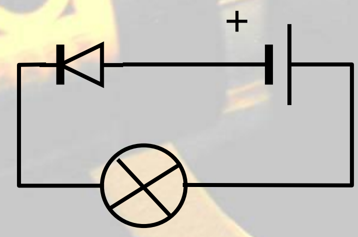
Voltampérová charakteristika

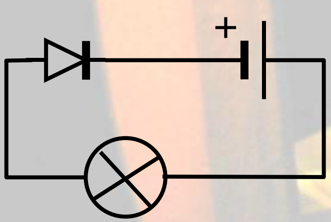
Běžné rezistory i vodiče se řídí Ohmovým zákonem – proud je přímo úměrný napětí. Tento vztah lze zobrazit do grafu jako funkční závislost proudu na napětí:



Ohmův zákon splňují všechny homogenní materiály (vodiče i polovodiče) ve velkém rozsahu přiložených napětí. Lze ovšem vyrobit součástky, které jej záměrně nesplňují. Například VA charakteristika polovodičové diody s p-n přechodem vypadá například takto :

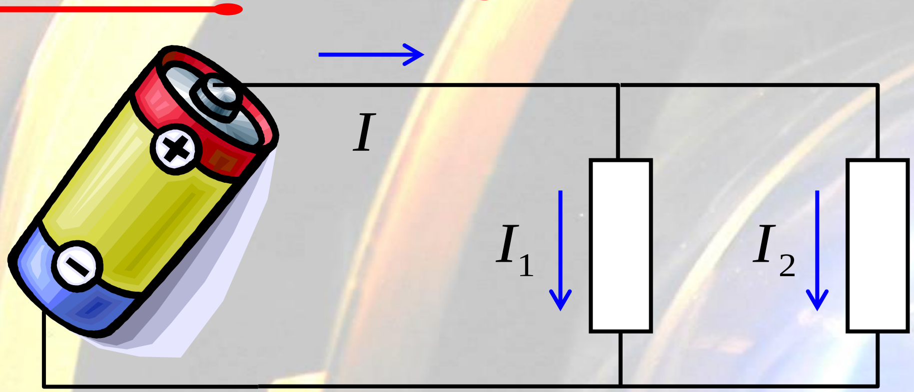






V kterém obvodě žárovka svítí?

Paralelní a sériové zapojení rezistorů



Paralelně (vedle sebe) zapojené odpory mají na svých svorkách stejné napětí. Každým z nich ovšem teče jiný proud, daný Ohmovým zákonem. Jejich součet je ale dle 1. Kirchhofova zákona roven proudu, který teče ven z baterie. Pokud do

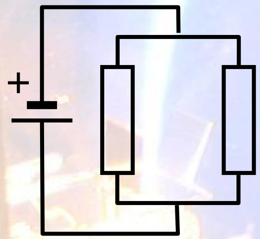
$$I = I_1 + I_2$$

dosadíme

$$U = R_1 \cdot I_1 \,, \quad U = R_2 \cdot I_2 \,, \quad U = R \cdot I$$

kde R je celkový odpor soustavy rezistorů, získáme

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$



Pro sériově (za sebou) zapojené rezistory musí platit, že napětí dodávané baterií je rovno součtu napětí na obou součástkách. Z výrazu

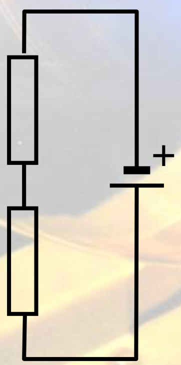
$$U = U_1 + U_2$$

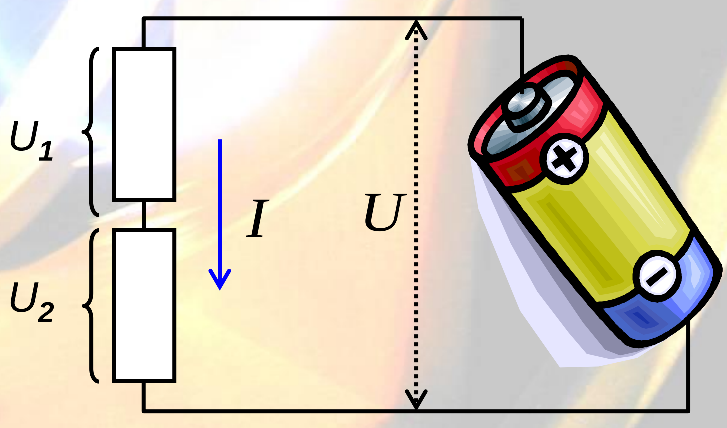
získáme po dosazení Ohmova zákona

$$U_1 = R_1 \cdot I \,, \quad U_2 = R_2 \cdot I$$

výrazy

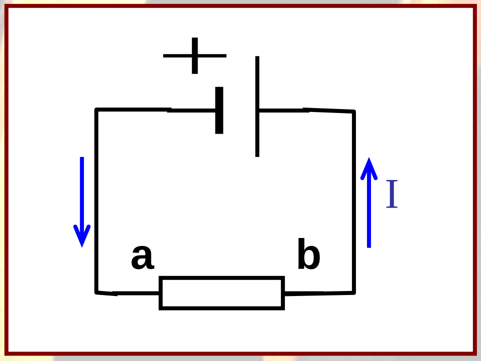
$$R = R_1 + R_2 \quad \text{resp.} \quad R = \sum_i R_i$$





Výkon v elektrických obvodech

Odvoďme si výkon, který dodává baterie do nějaké součástky s odporem R.



V obvodu je zapojena baterie a součástka. Mezi svorkami ***a*** a ***b*** je napětí *U*, jež je stejné jako napětí mezi svorkami baterie (svorky baterie a spotřebiče jsou spojeny vodiči). Napětí baterie je konstantní a obvodem prochází ustálený proud I. Náboj, který projde spotřebičem za infinitezimální čas *dt* je

$$dq = I \cdot dt$$

Elektrický potenciál mezi svorkami a a b poklesne o hodnotu U, a tedy

$$dE_p = dq \cdot \varphi_b - dq \cdot \varphi_a = dq \cdot U = U \cdot I \cdot dt$$

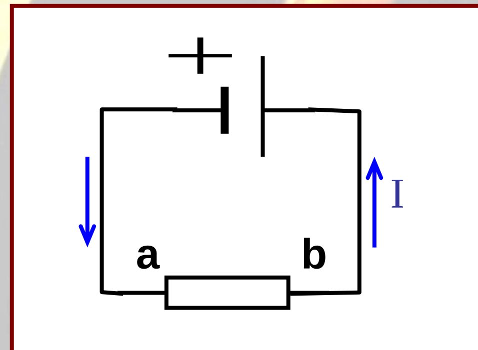
Ale protože výkon je definován jako změna energie za čas, můžeme rovnou říct, že

$$P = \frac{dE_p}{dt} = \frac{U \cdot I \cdot dt}{dt} = U \cdot I$$

$$\boxed{P = U \cdot I \qquad [P] = V \cdot A = W \qquad \text{elektrický výkon}}$$

Výkon v elektrických obvodech

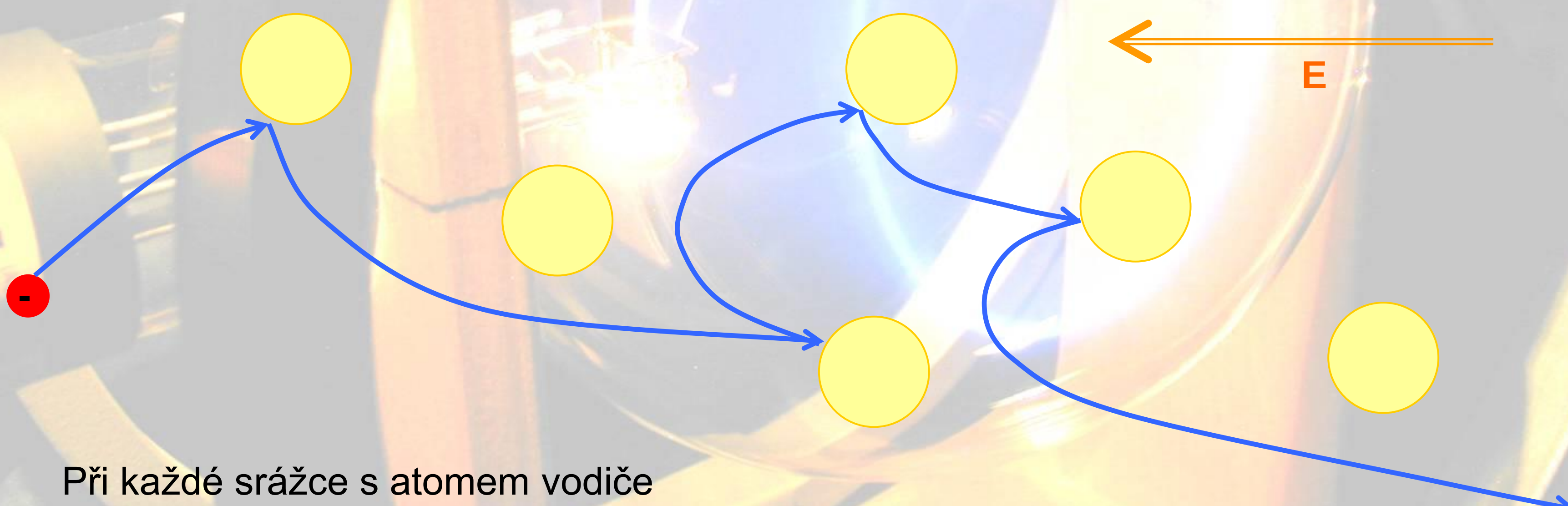
Výkon, který je rozptylován na rezistoru s odporem R se pak spočítá jako



$$P = U \cdot I$$
$$U = R \cdot I$$

$$\Rightarrow$$

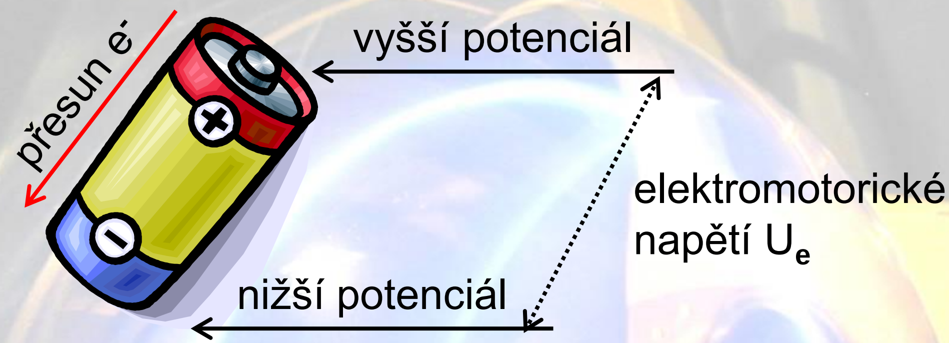
$$\boxed{P = R \cdot I^2 \qquad P = \frac{U^2}{R}}$$

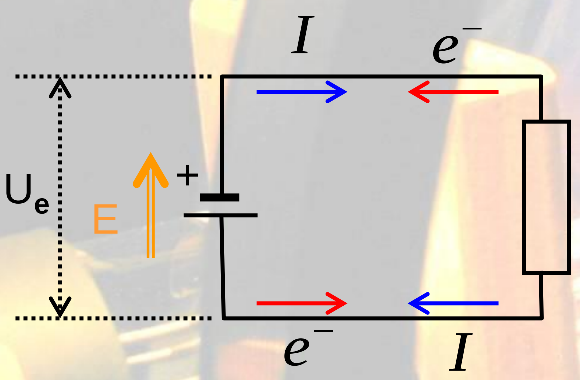


Při každé srážce s atomem vodiče odevzdá elektron část své kinetické energie, která se transformuje na teplo.

Elektromotorické napětí zdroje

Baterie je zařízení, které elektrochemicky přenáší náboje z jedné elektrody na druhou. Tím mezi nimi vytváří napětí.





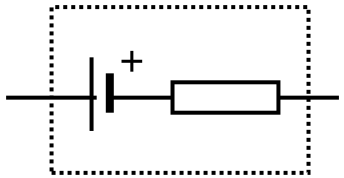
Ideální zdroj je takový, který neklade žádný odpor pohybu elektronů od kladného pólu k zápornému.

Reálný zdroj odpor nosičům náboje klade – chová se tedy jako rezistor (je charaktrerizován veličinou vnitřní odpor).

Elektromotorické napětí zdroje je definováno jako změna práce, kterou zdroj vykonal při přesunu náboje mezi svorkami, tedy

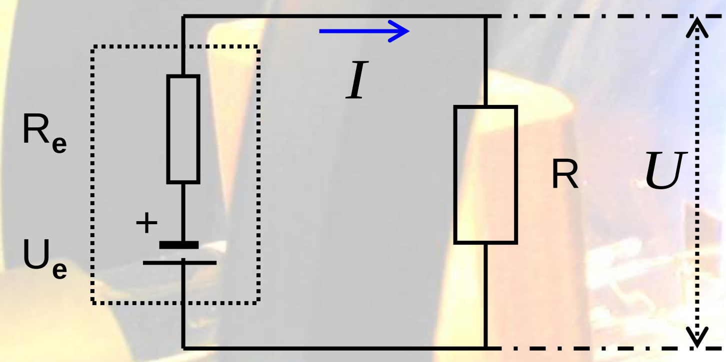
$$U_e = -\frac{dW_Z}{dq}$$

Elektromotorické napětí zdroje



Náhradní schéma reálného zdroje

Zapojíme-li do obvodu reálný zdroj s vnitřním odporem, zjistíme, že napětí, které dodává, je závislé na zátěži (výkonu). Zapojme jej do obvodu s jednoduchým rezistorem :



Vyjádříme-li Ohmův zákon pro jednotlivé součástky, zjistíme, že

$$U = R \cdot I$$

$$U_e = (R + R_e) \cdot I$$

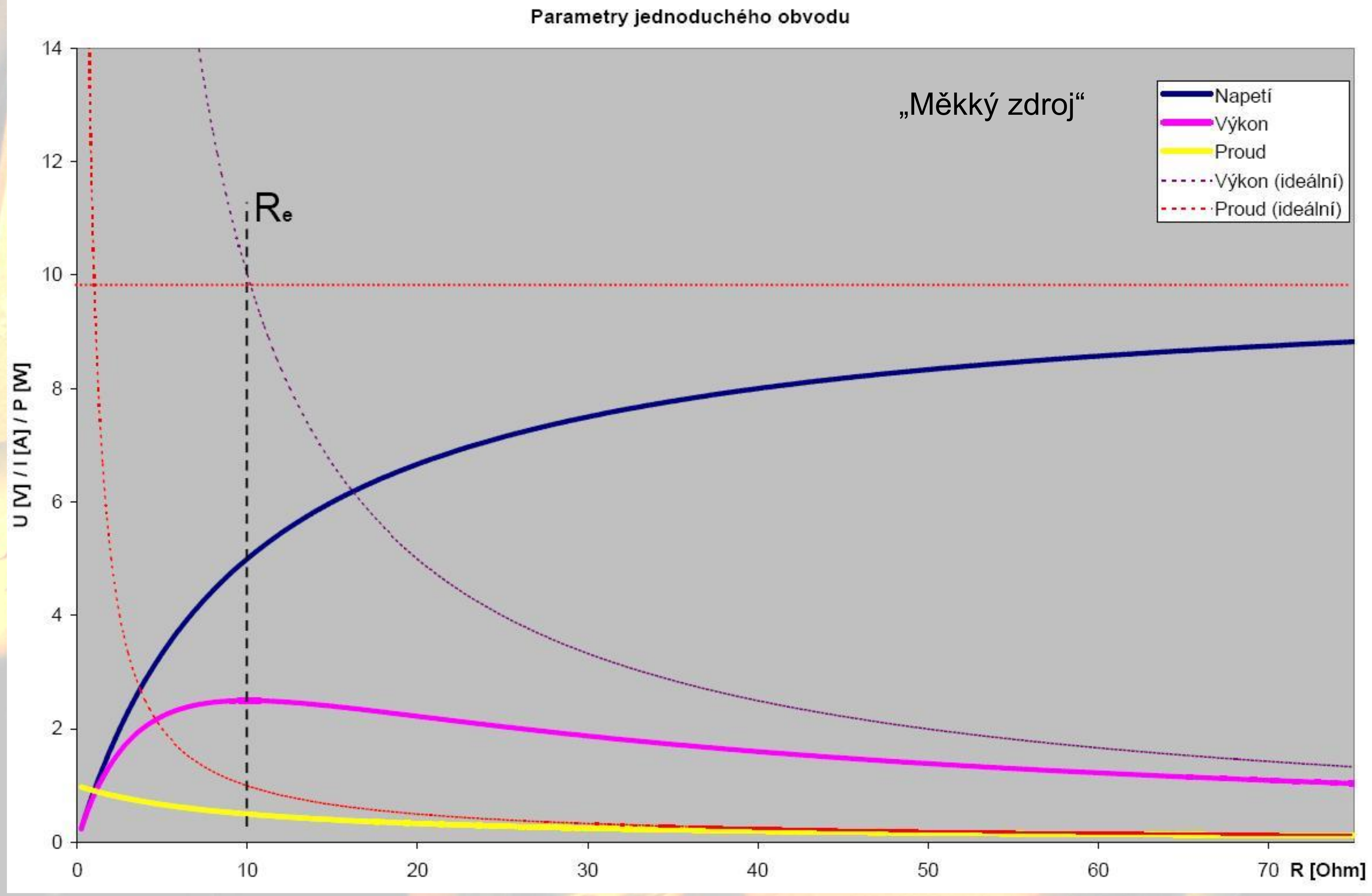
odkud zjistíme, že

$$U = \frac{R}{R + R_e} \cdot U_e \quad \Rightarrow \quad P = \frac{U^2}{R} = U_e^2 \cdot \frac{R}{(R + R_e)^2}$$

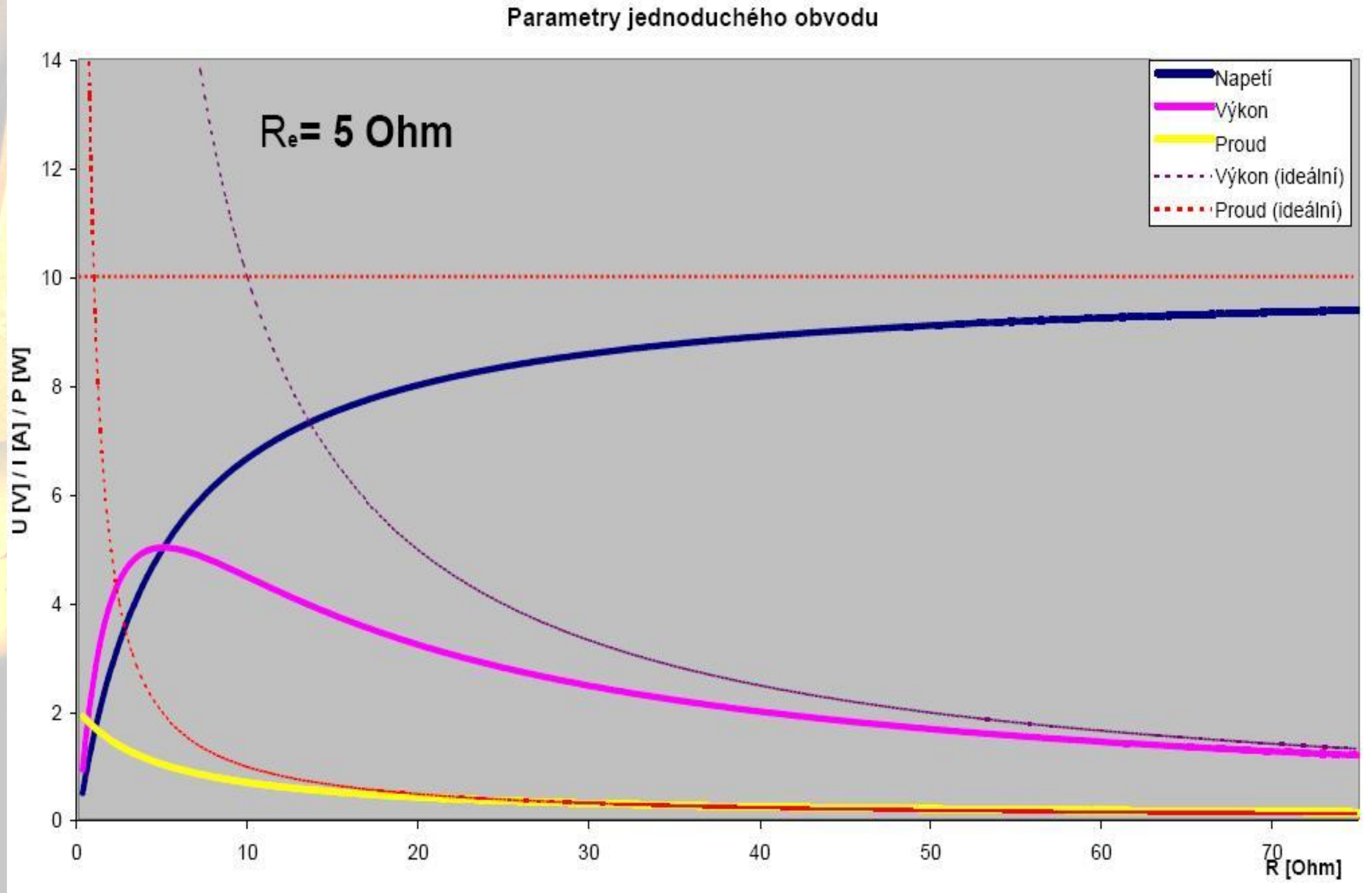
Napětí dodávané zdrojem se tedy mění v závislosti na odporu spotřebiče a tedy i odebíraný výkon se mění složitěji. Pro ideální zdroj, který má R_e -> *0*, se zákony změní na jednodušší podobu :

$$U = \frac{R}{R} \cdot U_e = U_e \quad \Rightarrow \quad P = \frac{U^2}{R} = U_e^2 \cdot \frac{R}{R^2} = \frac{U_e^2}{R}$$

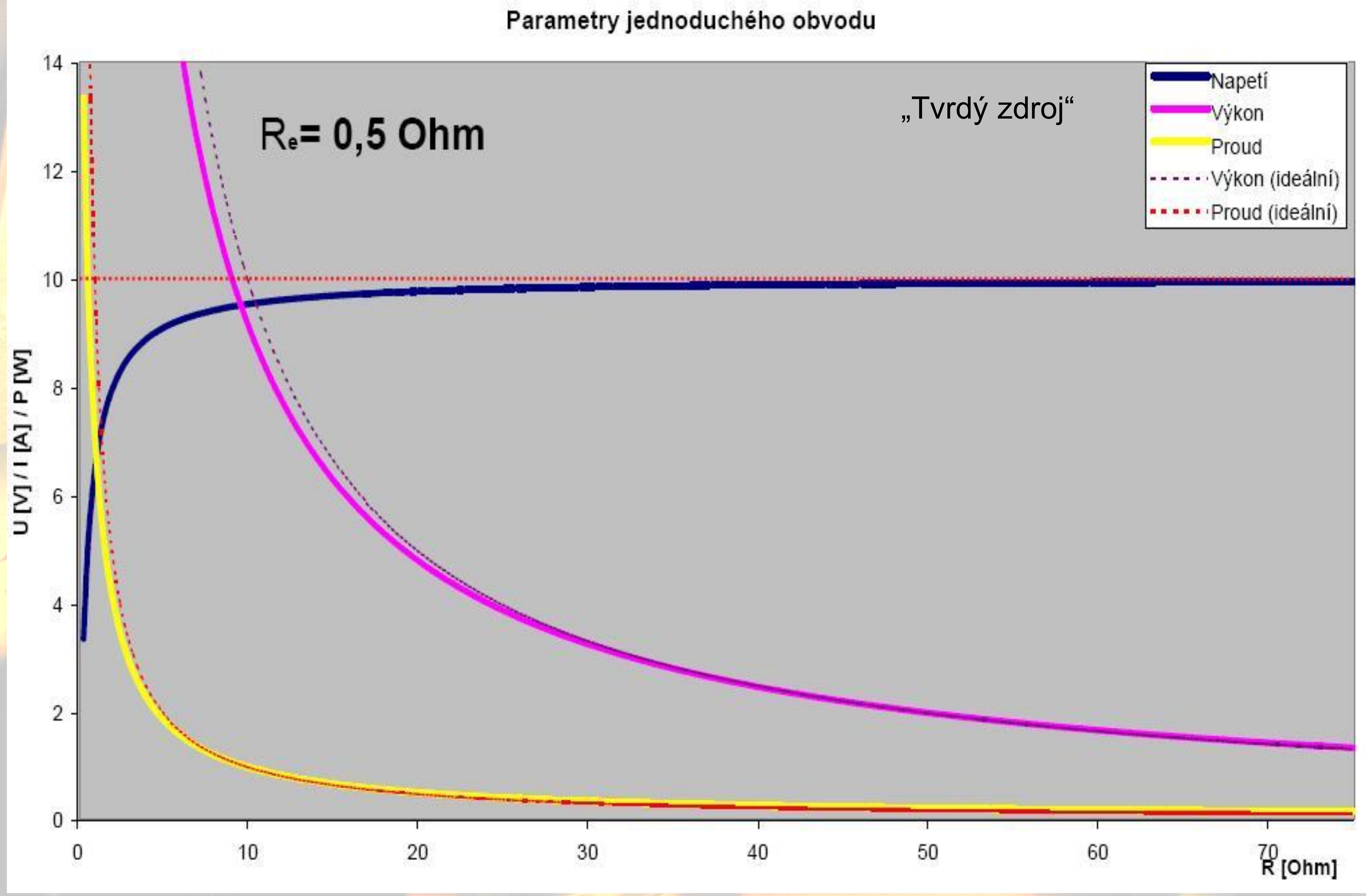
Elektromotorické napětí zdroje



Elektromotorické napětí zdroje

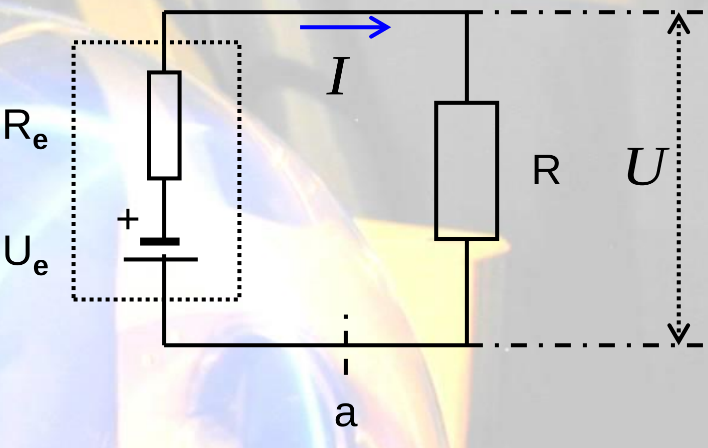


Elektromotorické napětí zdroje



Elektromotorické napětí zdroje

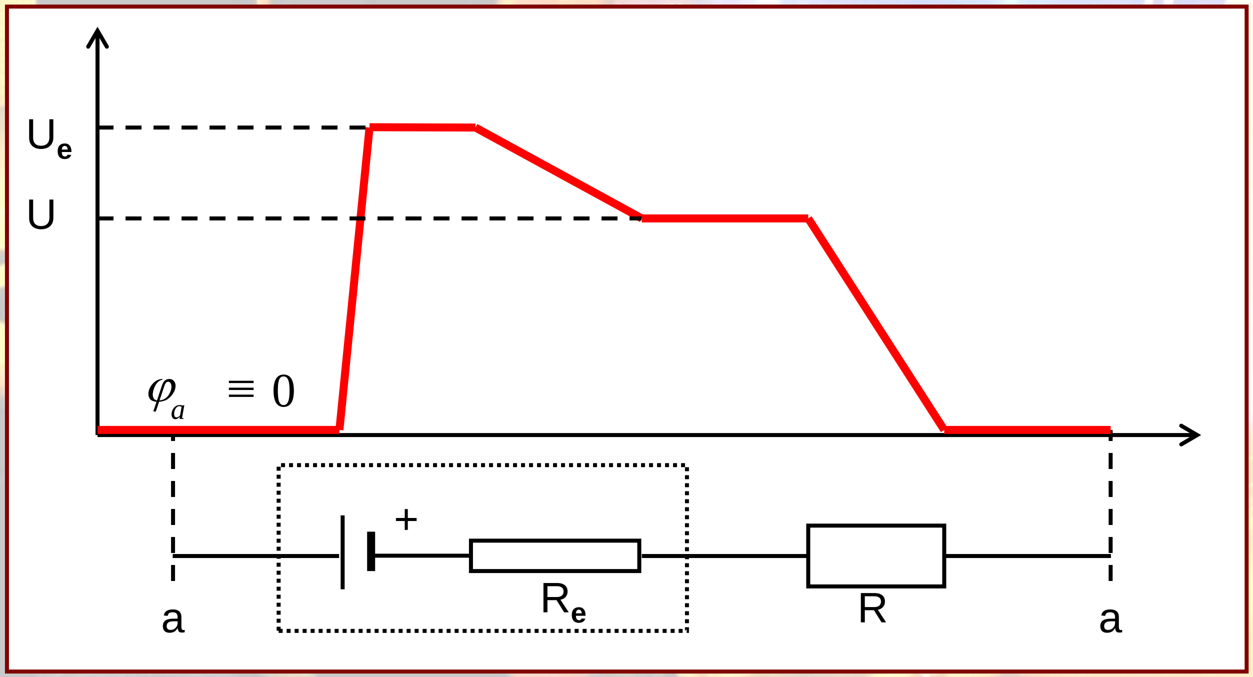
Podíváme-li se na rozložení potenciálu podél obvodu, získáme následující graf :



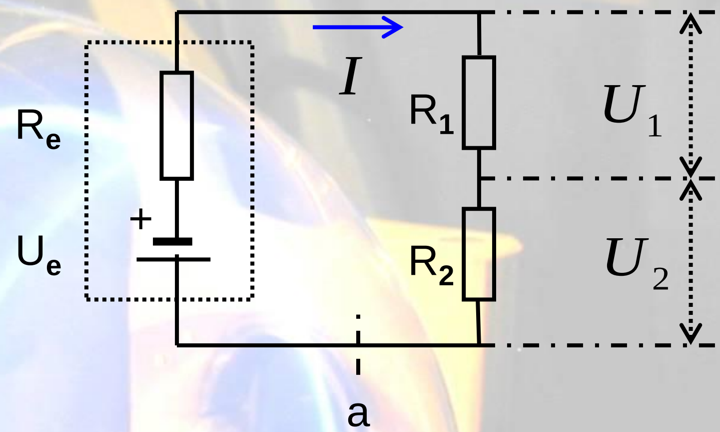
φ_a Potenciál na záporné svorce zdroje

U_e Elektromotorické napětí

U Napětí na rezistoru R

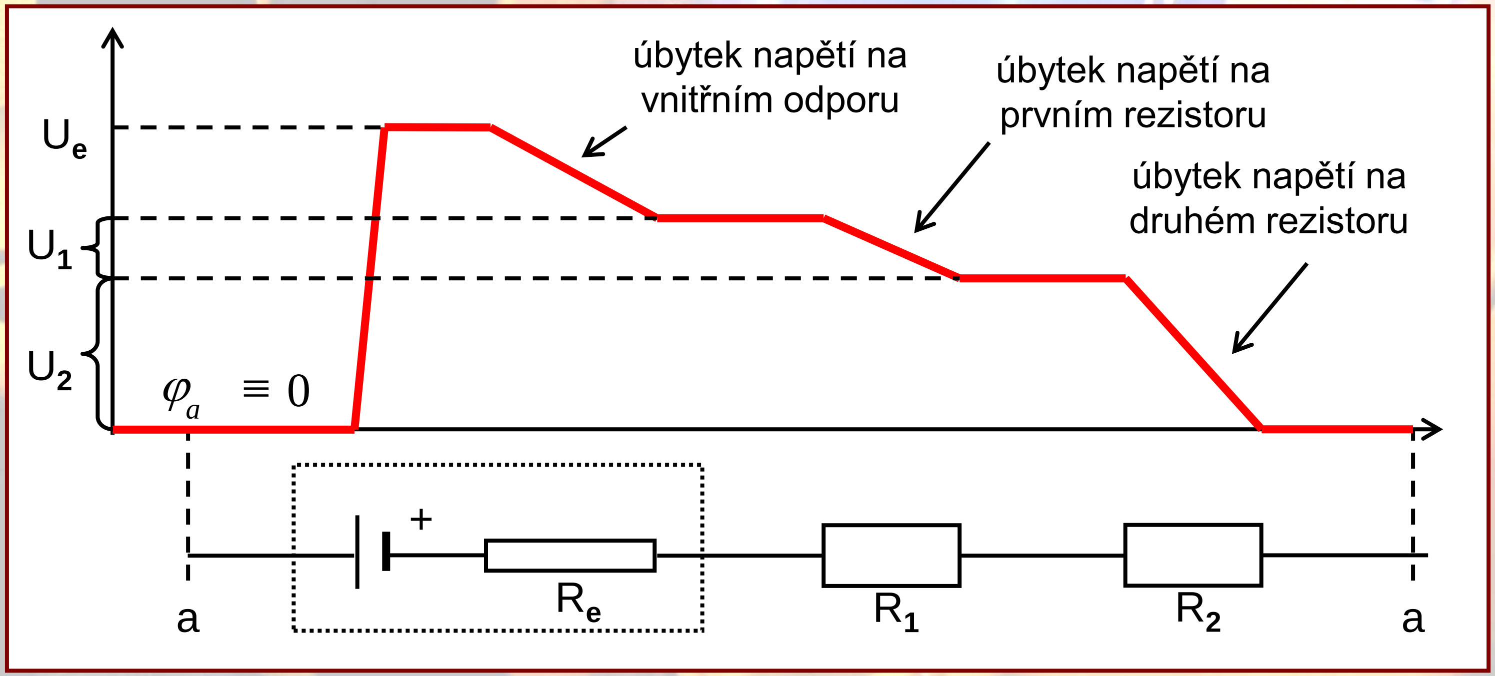


Elektromotorické napětí zdroje

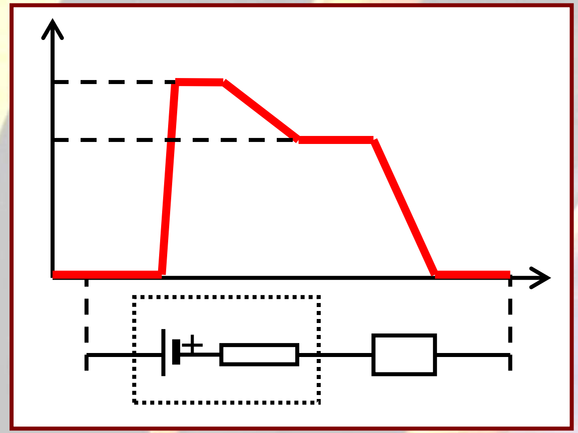


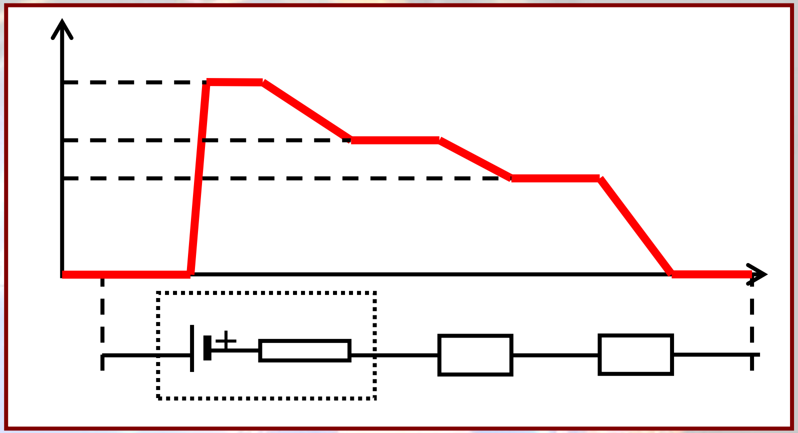
Podíváme-li se na rozložení potenciálu podél obvodu s dvěmi rezistory, získáme následující graf :

φ_a	Potenciál na záporné svorce zdroje
U_e	Elektromotorické napětí
U_1	Napětí na rezistoru R_1
U_2	Napětí na rezistoru R_2



Elektromotorické napětí zdroje





Z předchozích dvou grafů lze usoudit, že celkový úbytek napětí na rezistorech (spotřebičích, součástkách) je roven elektromotorickému napětí na zdroji. Je-li zdrojů v obvodu více, pak se sčítají. Tedy platí, že

$$U_{e1} + U_{e2} + \cdots = U_1 + U_2 + \cdots = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + \cdots$$

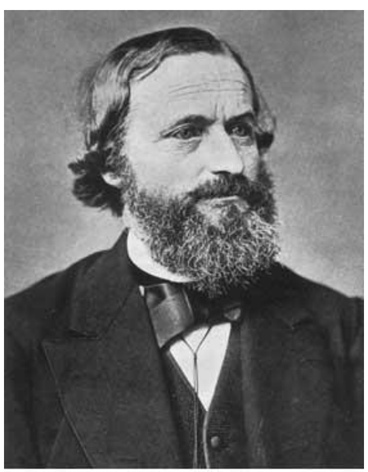
Napětí v obvodu

Tento poznatek zobecnil opět Gustav Kirchhoff. Mějme složitější obvod, ve kterém lze najít tzv. „smyčky“ – tedy vodivě spojené jednoduché okruhy. V každém takovém okruhu platí, že součet všech napětí je nulový, tedy

$$\sum_i U_e - \sum_j U_j = 0$$

tj. suma napětí na zdrojích je rovna sumě úbytků napětí na součástkách. Jsou-li v obvodu jen rezistivní součástky a zdroje U_e, pak za Uj dosadíme z Ohmova zákona a máme

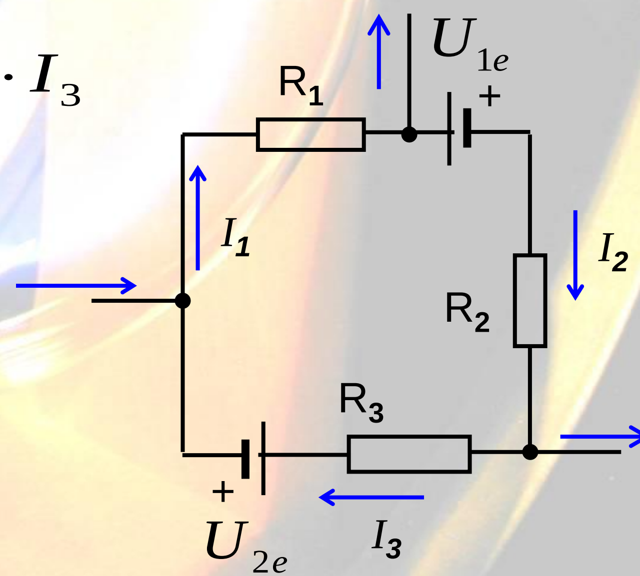
$$U_{1e} + U_{2e} =$$
$$= R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3$$


Library of Congress

Gustav Robert Kirchhoff
1824 - 1887

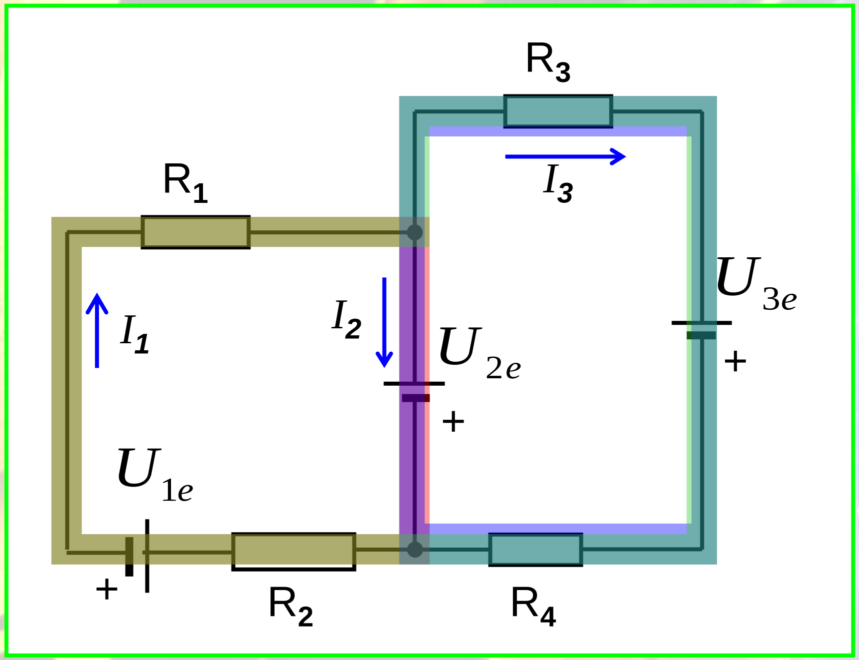
$$\sum_i U_e - \sum_j R_j \cdot I_j = 0$$

2. Kirchhoffův zákon



Výpočet proudů v obvodu

Kirchhoffovy zákony lze použít pro výpočet ustálených stavů obvodů s více smyčkami. Jako příklad vyřešme napětí a proudy v následujícím obvodu :



Nejprve je třeba zvolit smyčky, které popíšeme rovnicemi. Máme na výběr ze tří.

1. smyčka 2. smyčka 3. smyčka

Není ovšem třeba popisovat všechny – vidíme, že každá ze smyček je složená ze dvou ostatních a vzniklá soustava tří rovnic by byla lineárně závislá. Stačí nám smyčky (a rovnice) dvě. Zvolme například červenou a modrou.

$$\sum_i I_i = 0$$ pro každý uzel

Nyní je nutné označit si proudy, které tečou v jednotlivých větvích (větev je vodič mezi jednotlivými uzly i se součástkami, které na něm jsou). V každém uzlu pak aplikujme 1. Kirchhofův zákon – tedy součet všech proudů musí být nulový (co do uzlu přiteče, to z něj zase odteče).

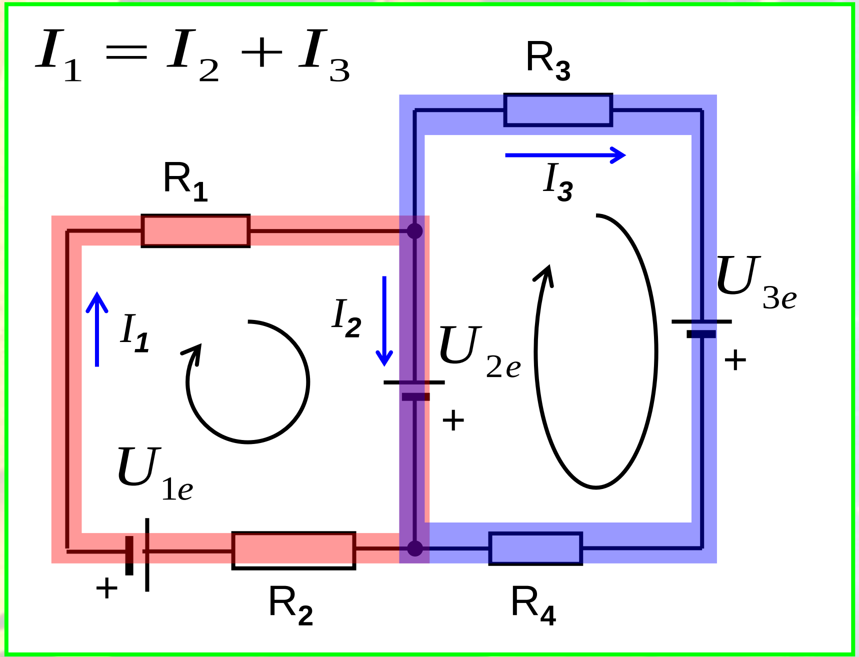
$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Rovnice jsou na sobě opět lineárně závislé a stačí jen jedna.

Výpočet proudů v obvodu

Kirchhofovy zákony lze použít pro výpočet ustálených stavů obvodů s více smyčkami. Jako příklad vyřešme napětí a proudy v následujícím obvodu :



Nyní je třeba pro každou zvolenou smyčku sestavit rovnici vycházející z 2. Kirchhoffova zákona. Zvolme-si v každé z nich směr sestavování. Každý proud souhlasný s tímto směrem budeme brát jako kladný, nesouhlasný záporný. To samé pak pro napětí – narazíme-li při cestě na záporný pól, je kladné, pokud cesta směřuje do kladného, je záporné.

Sestavme rovnice. Pro každou smyčku platí

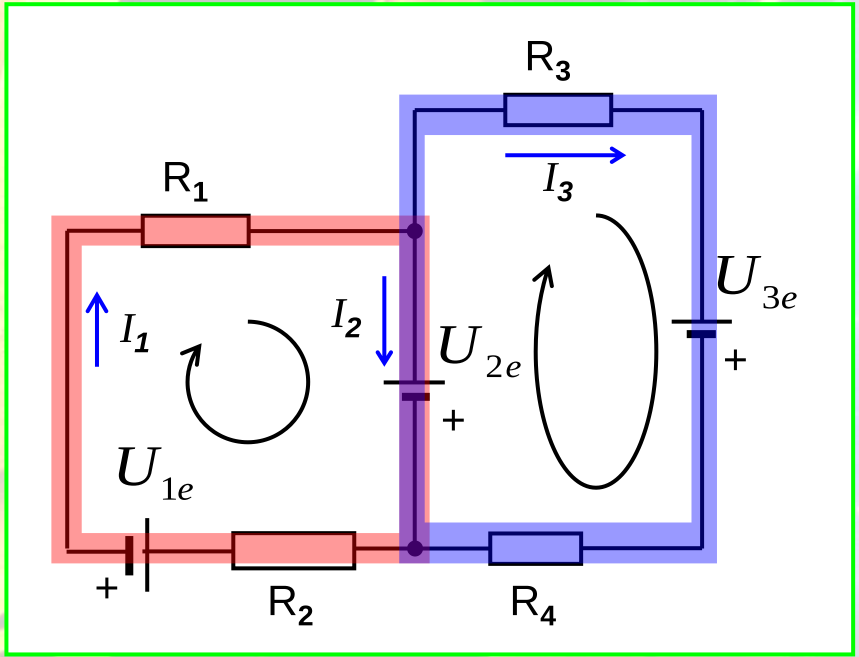
$$\sum_i U_e = \sum_j R_j \cdot I_j$$

$$U_{1e} + U_{2e} = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1$$ pro červenou smyčku

$$-U_{2e} + U_{3e} = R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_3$$ pro modrou smyčku

Výpočet proudů v obvodu

Kirchhofovy zákony lze použít pro výpočet ustálených stavů obvodů s více smyčkami. Jako příklad vyřešme napětí a proudy v následujícím obvodu :



Máme tedy soustavu rovnic

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$U_{1e} + U_{2e} = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1$$

$$-U_{2e} + U_{3e} = R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_3$$

která je ovšem naprosto triviální, neboť neznámé jsou v našem případě proudy a tedy po elementárních úpravách získáme

$$I_1 = \frac{U_{1e} + U_{2e}}{R_1 + R_2}$$

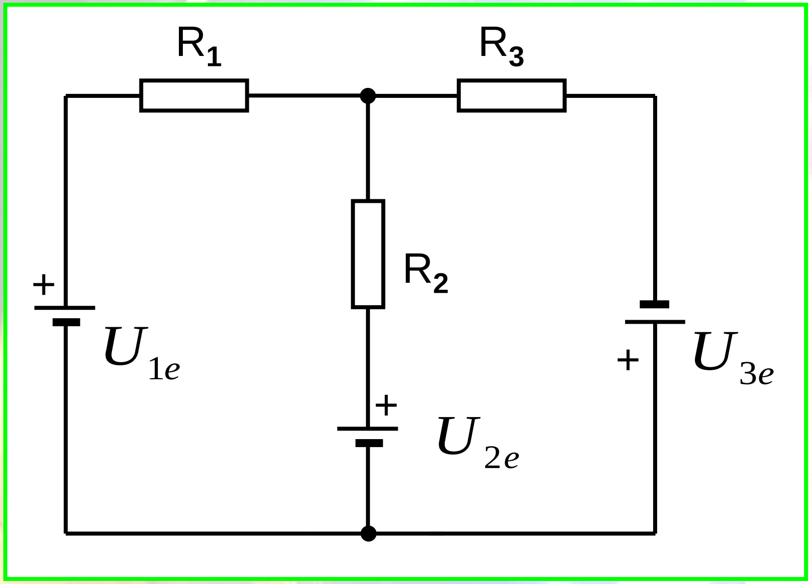
$$I_3 = \frac{U_{3e} - U_{2e}}{R_3 + R_4}$$

$$I_2 = \frac{U_{1e} + U_{2e}}{R_1 + R_2} - \frac{U_{3e} - U_{2e}}{R_3 + R_4}$$

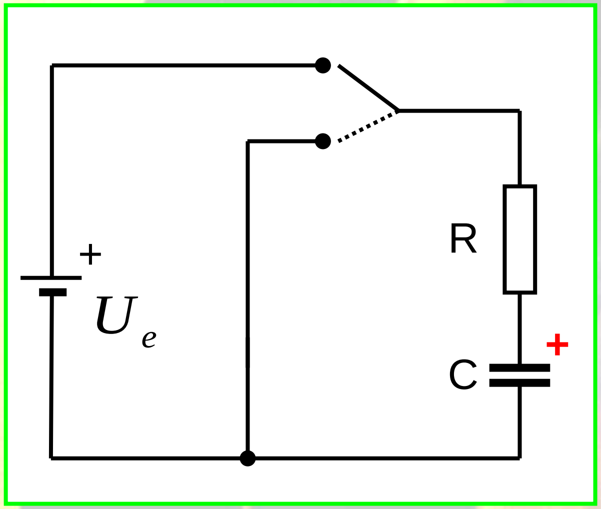
Výpočet proudů v obvodu

Příklad

Pomocí Krichhofových zákonů spočítejte proudy v obvodu a úbytek napětí na rezistorech v následujícím obvodu



Obvod s kondenzátorem



Prozkoumejme, jak se chová kondenzátor zapojený do obvodu se stejnosměrným elektromotorickým napětím. Předpokládejme, že při sepnutí spínače je kondenzátor vybitý. V ten okamžik do kondenzátoru ovšem začne proudit náboj – a obvodem tedy teče proud. Jak se na deskách hromadí náboj, kumuluje se i napětí působící proti U_e a proud tedy klesá. Víme, že pro napětí na kondenzátoru platí

$$U_C = \frac{q}{C}$$

Využijme tedy Kirchoffova zákona o napětí ve smyčce a sestavme smyčkovou rovnici :

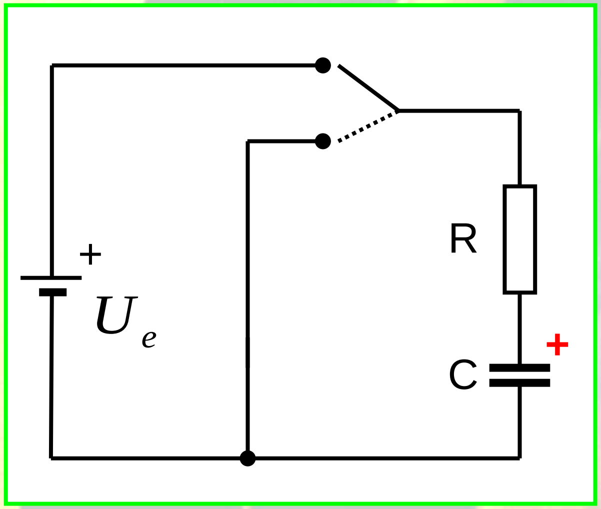
$$U_e - U_C = R \cdot I \qquad \Rightarrow \qquad U_e = \frac{q}{C} + R \cdot I$$

A protože víme, že proud je změna náboje v čase, lze do rovnice dosadit $I = \frac{dq}{dt}$ a tedy :

$$U_e = \frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad CU_e = q + RC \cdot \dot{q}$$

Tato diferenciální rovnice popisuje nárůst náboje na deskách kondenzátoru.

Obvod s kondenzátorem



$$CU_e = q + RC \cdot \dot{q}$$

Vyřešíme ji nejprve bez levé, konstantní strany, tedy

$$q + RC \cdot \dot{q} = 0$$

řešení je jednoduché, snadno se přesvědčíme, že jsou to všechny funkce ve tvaru

$$q(t) = konst \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Dle teorie řešení diferenciálních rovnic nyní stačí najít jedno řešení nehomogenní rovnice a výsledek přičíst. Evidentní řešení je

$$q(t) = C \cdot U_e$$

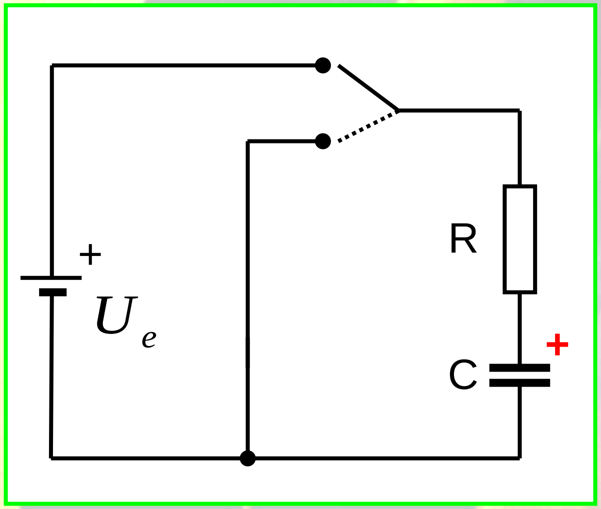
máme tedy

$$q(t) = C \cdot U_e + konst \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

a pokud do rovnice vložíme počáteční podmínku *t=0 : q(0) = 0*, získáváme konečné řešení

$$q(t) = C \cdot U_e \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

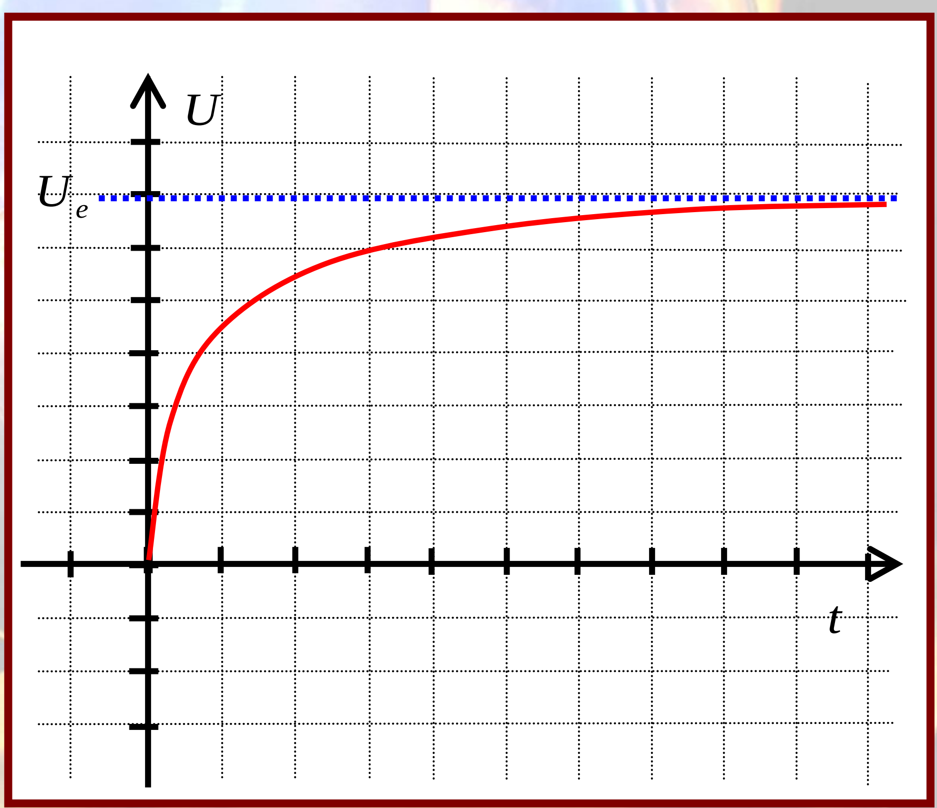
Obvod s kondenzátorem



$$q(t) = C \cdot U_e \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Vydělíme-li rovnici kapacitou, dostáváme

$$\frac{q(t)}{C} = U(t) = U_e \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

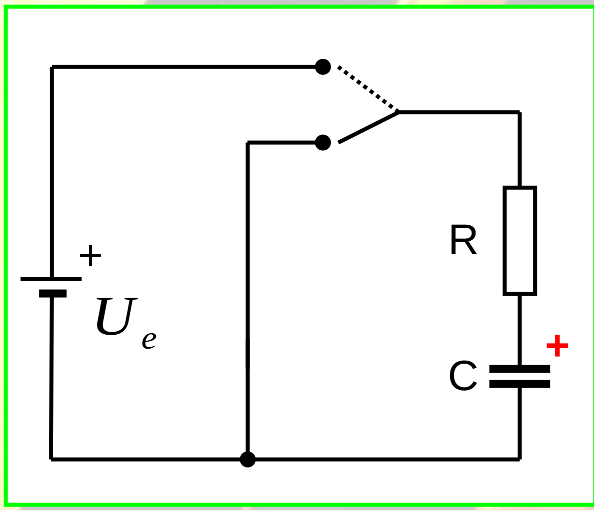


Napětí roste exponenciálně a limitně se blíží k elektromotorickému napětí zdroje U_e. Rychlost růstu udává konstanta

$$\tau_C = RC$$ časová konstanta

Čím je toto číslo větší, tím se kondenzátor nabíjí pomaleji.

Obvod s kondenzátorem



Obdobně lze vyřešit vybíjení kondenzátoru přes odpor. Na odporu R se rozptyluje výkon, energie (a tím napětí) v kondenzátoru klesá. Opět použijeme smyčkový zákon a máme

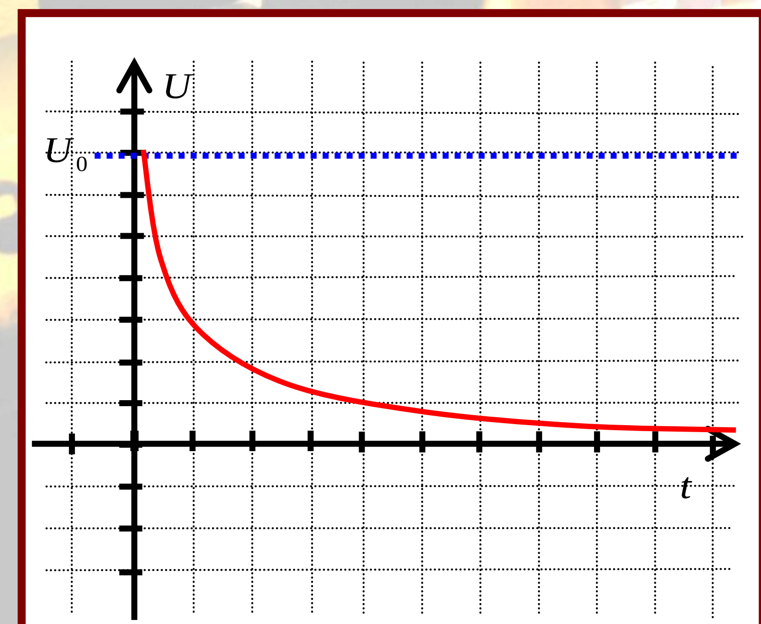
$$U_C = R \cdot I \quad \Rightarrow \quad 0 = q + RC \cdot \dot{q}$$

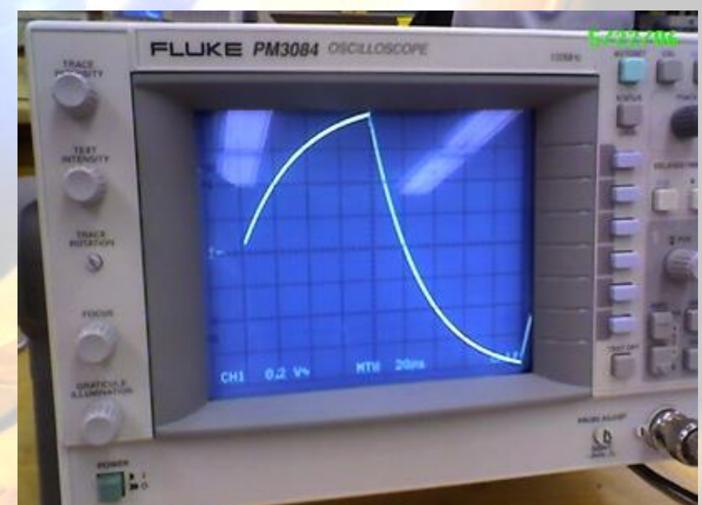
Zde je řešení zcela jasné :

$$q(t) = konst \cdot e^{-RC \cdot t}$$

a z počáteční podmínky *q(0)* = U_0/C získáme

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-RC \cdot t}$$





Shrnutí

- Elektrický náboj a Coulombův zákon
- Millikanův pokus
- Elektostatické pole
- Elektrický dipól
- Elektrický potenciál a napětí
- Náboj ve vodiči
- Kondenzátory a jejich zapojení
- Elektrický proud a odpor
- Rezistory a jejich zapojení
- Výkon v elektrickém obvodu
- Elektromotorické napětí
- Kirchhoffovy zákony a výpočty ustálených proudů v obvodech
- Obvody s kondenzátorem