14/9

každej semestr 3 testy jinak nápočtení

alespoň 5.5 bodů / 8

zkouška → 2. semestr
– test

1. výroky, množiny

komplexní čísla
konec

2. semestr logaritmické věci
LAA – matice

3. semestr
vektory, přímky, diferenciály, průběh fce,
více fcí

4. diferenciální rce

lim. + fce
test 11.10.
logika

test 2, 21.11.
fce, rce, nerovnice
+ abs. hodnota
test 3
komplexní čísla

VÝROKY

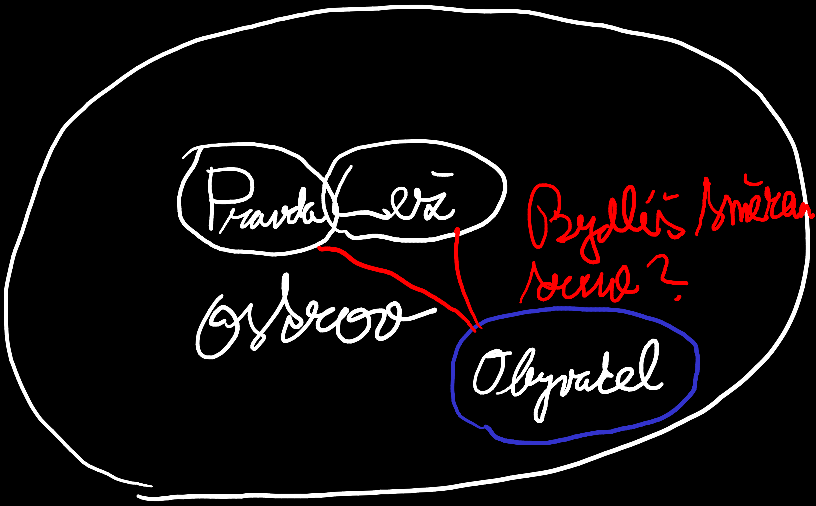
– výrok je jakékoliv tvrzení u kterého nastává právě jedna ze možností

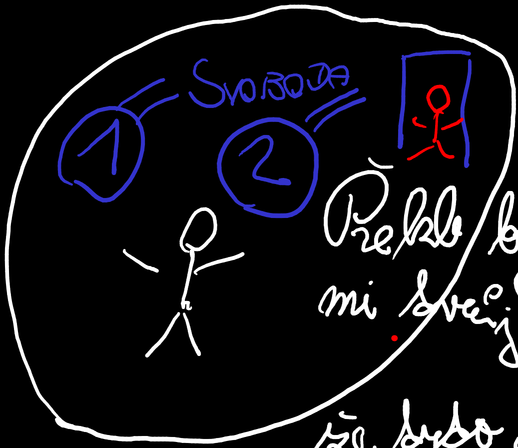
Př

1. A: Dneska je pondělí. ✓
2. B: $2 > 3$ ✓
3. C: $3 \geq 3$ ✓
4. D: ČERVENÁ ✗
5. E: $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ✓

6 F: Jsem lhář ×

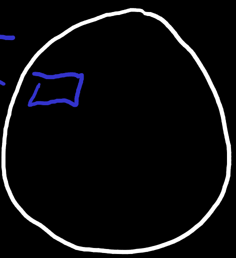
7 Ve vesmíru žijí mimozemšťané ✓

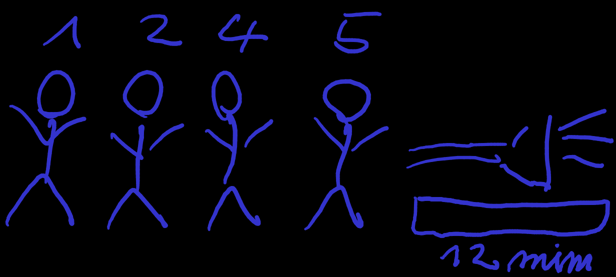




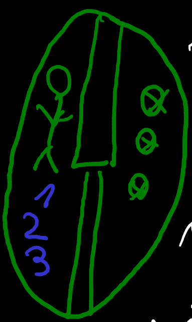
Řekl by mi tvůj kolega, že tudy dveře vedou na svobodu?

LLL
TTT





2 4 5 | 1
2 | 1 4 5
1 | 1 2 4 5
12 min



2 žárovky zapnout, potom vypnout, zapnout, která je horká a teplá

1281 = 2
0812 = 3
6912 = 2
1089 = 3
2069 = 2
8888 = 8

Počet koleček

2669 = 3
1018 = 3
2069 = ?

5/9

Pravdivostní hodnota

$p(A) = 1$ ... pravda

$p(A) = 0$ ... nepravda

NEGACE VÝROKU: A' non A $\neg A$

- popření původního výroku
  ^ v plném rozsahu

$P(A) = 1$
$P(A') = 0$

B: $3 \geq 2$ $\quad P(B) = 1$

B': $3 < 2$ $\quad P(B') = 0$

C: VE ŠKOLE JE ASPOŇ 10 ŽÁKŮ.

C' ___ " ___ JE NEJVÝŠE 9 " .

D: NA ULICI JE NEJVÝŠE 8 AUT.

D': ___ " ___ ASPOŇ 9 AUT.

<u>Logické spojky</u>

- slouží ke spojení výroků
- pomocí složených spojek

① KONJUNKCE $\wedge$ „a" (a současně)

→ „et"

A: V Praze svítí slunce.

B: V Brně prší. $\quad \underline{A \wedge B}$

$C: 3 > 1$

$C \wedge D$

$D: x < 7$ → výroková proměnná

$P(A \wedge B)$

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B)'$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Disjunkce (Alternativa)

$\boxed{A \vee B}$ „nebo"

$\vee$ → vel

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Př Pohyb vlaků na nádraží je popsán formulí

$A \vee (B' \wedge C)$

A: vlak A může vjet do nád

B: B

~~C~~: $A \cup (B' \wedge C)$

A	B	C	B'	$(B' \wedge C)$	$A \cup (B' \wedge C)$
0	0	0	1	0	
0	0	1	1	1	

$\vee$... STAČÍ 1x 1

$\wedge$... OBĚ 2x 1

0	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	
0	1	1	0	0	
1	0	0	1	0	
1	1	1	0	0	
1	1	0	0	0	

Implikace $\Rightarrow$ $A \Rightarrow B$ Z A plyne B

Platí-li A, pak platí B

A: V Praze prší.

B: Hladina Vltavy stoupá.

$\underline{A \Rightarrow B}$

$A \Rightarrow B$ Jestliže v Praze prší, pak hladina Vltavy stoupá

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B)'$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

0 pouze když první true a druhý false

Ekvivalence ... $\Leftrightarrow$ $A \Leftrightarrow B$

A je-li ekvivalentní s B

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B)'$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

1 tehdy jsou-li stejné pravd. hodnoty obou výroků?

(Buď dvakrát 1 nebo 0)

Př.

Sestrojte tabulku pro formuli

$$[(A \Rightarrow B) \wedge C] \Leftrightarrow [(A \wedge C) \Rightarrow (B \vee C)]$$

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$[(\ldots) \wedge C]$	$(A \wedge C)$	$(B \vee C)$	$() \Rightarrow ()$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1

TAUTOLOGIE

$[\ldots] \Leftrightarrow [\ldots]$
1
0
0
0
1
0
1
0

NEGACE SLOŽENÝCH VÝROKŮ

① negace konjunkce = disjunkce negací

A	B	$A \wedge B$	A'	B'	$A' \vee B'$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1

$$\boxed{(A \wedge B)' = A' \vee B'}$$

② negace disjunkce = konjunkce negací

A	B	$A \vee B$	A'	B'	$(A \wedge B)'$
1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

$$\boxed{(A \vee B)' = A' \wedge B'}$$

③ negace implikace

A	B	$A \Rightarrow B$	B'	$A \wedge B'$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	0

$$\boxed{(A \Rightarrow B)' = A \wedge B'}$$

$A \Rightarrow (B \vee C)'$

$\boxed{A \Rightarrow (B' \vee C')}$

Negujte výrok: $A \Rightarrow (B \vee C)$

Př. Sestavy

$[A \Rightarrow (B \vee C)]'$

A	B	C	$(B \vee C)$	$A \Rightarrow (\ldots)$	$[A \Rightarrow (\ldots)]'$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1

0	1	1	1	1	0	
0	1	0	1	1	0	
0	0	1	1	1	0	
0	0	0	0	1	0	

A	B	C	B'	C'	$B' \vee C'$	$A \Rightarrow B' \vee C'$
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

$A \wedge B \qquad (A \wedge B)' = A' \vee B'$

$A \vee B \qquad (A \vee B)' = A' \wedge B'$

$A \Rightarrow B \qquad (A \Rightarrow B)' = A \wedge B'$

NEGACE EKVIVALENCE

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Leftrightarrow B)' = (A \Rightarrow B)' \vee (B \Rightarrow A)'$$

$$(A \Leftrightarrow B)' = (A \wedge B)' \vee (B \wedge A')$$

TAUTOLOGIE

– Výrok, který je vždy pravdivý

Př

$$[A \wedge (B \vee C')] \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge C')]$$

A	B	C'	B ∪ C'	A ∧ (...)	A∧B	A∧C'	(A∧B)∨(...)	... ⇔ ...
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1
				0				

KVANTIFIKÁTOR

1. OBECNÝ (VELKÝ)

   $\forall$ ... pro každé x

2. EXISTENČNÍ (MALÝ)

   $\exists (x)$ ... Existuje x, pro které platí ...

$\exists (x \in M); x^2 = -1$ → Platí je-li M množina komplexních čísel

Pak např. $i^2 = -1$ máme-li stejný typ
$(-i)^2 = -1$ pak lze zaměnit

$A: \forall (x \in \mathbb{R}) \exists (y \in \mathbb{R}); x + y = 8 \quad P(A) = 1$

$B: \exists (y \in \mathbb{R}) \forall (x \in \mathbb{R}); x + y = 8 \quad P(B) = 0$

...

PŮV. VÝROK $\forall (x \in A); A$ ... Pro každé x platí A

NEGACE $\exists (x \in A)$

② MALÝ KVANTIFIKÁTOR

- pův. výrok $\exists (x \in M); A$ $\quad \exists (x \in \{1, 2, 5, 7\}); x$ není prvočíslo $\quad P(A) = 1$
- negace $\forall (x \in M); A'$ $\quad \forall (x \in 1, 2, 5, 7); x$ je prvočíslo $\quad P(B) = 0$

$\exists!$ ... Existuje právě jedno

MNOŽINY

– pod pojmem množina rozumíme souhrn nějakých prvků, který má společné vlastnosti

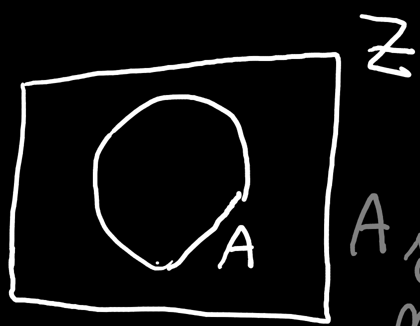
$a = \{1; 2; 5\}$ – výčet prvků

$B = \{1; 3; 7\}$ závorky pro množiny

$C = \emptyset$ Prázdná množina, 0 prvků

$D = \{x \in Z; x > 5\}$ ... Charakteristická vlastnost

ZNÁZORNĚNÍ



$A \subseteq Z$ inkluze

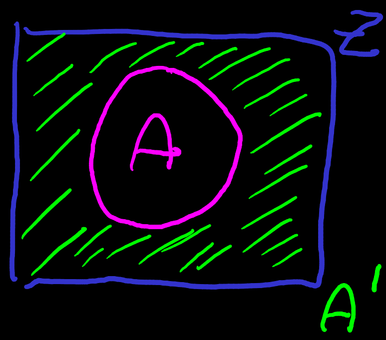
A je podmnožinou množiny Z

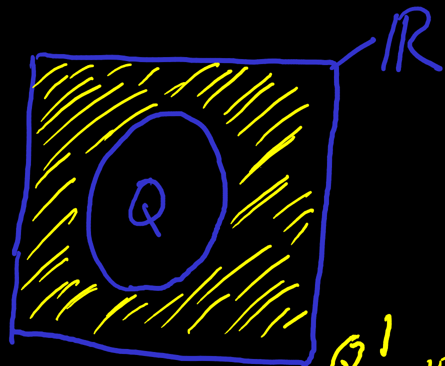
$A \subseteq B$ ... A je podmnožinou množiny B, $\forall$ prvek množiny A je současně prvkem množiny B

DOPLNĚK MNOŽINY

A ... množina

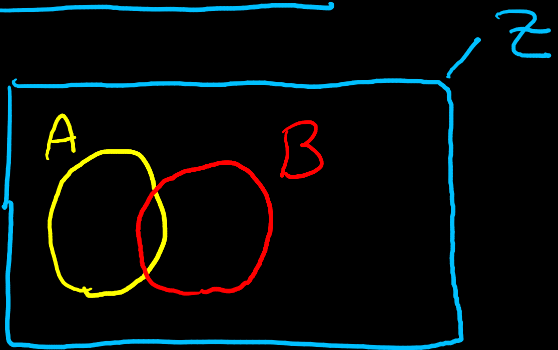
A' ... doplněk ← obsahuje všechny prvky základní množiny, které nejsou v množině A





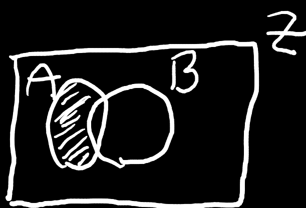
Q' ... IRACIONÁLNÍ

DVĚ MNOŽINY



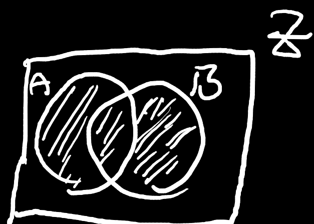
Rozdíl množiny ... $A \setminus B$ $(A - B)$

- prvky z množiny A, které nejsou součástí množiny B



Sjednocení množin $A \cup B$

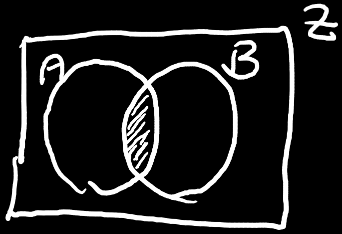
- prvky, které patří alespoň do jedné z množin



Průnik množin

$A \cap B$

– prvky, které patří do obou množin



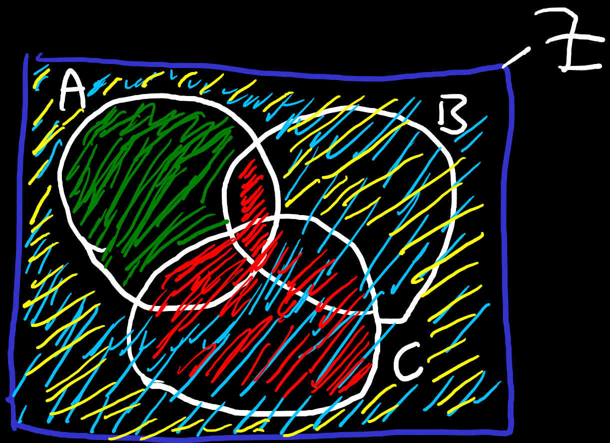
3 množiny

Př

Na diagramu pro 3 množiny vyznačte:

a) A' b) $(A \cap B) \cup C$

c) $(A \cup C)'$ d) $(A \setminus B) \cap C'$



Př

Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 7, 10, 13\}$

$B = \{x \in Z, x > 2 \wedge x \leq 9\}$

$C = \{1, 3, 6, 9, 12, 13\}$

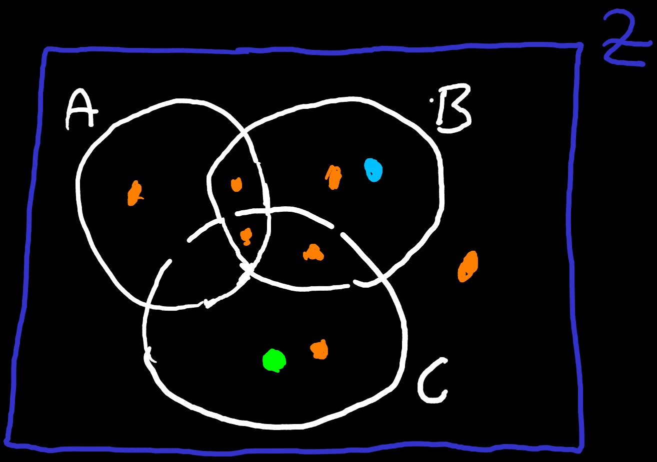
$Z = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$

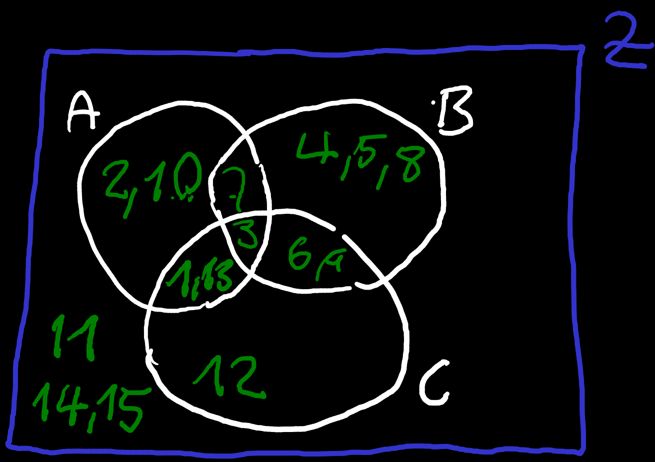
ZAKRESLETE A URČETE

1) $(A' \cap B) \cap C = \{4, 5, 8\}$

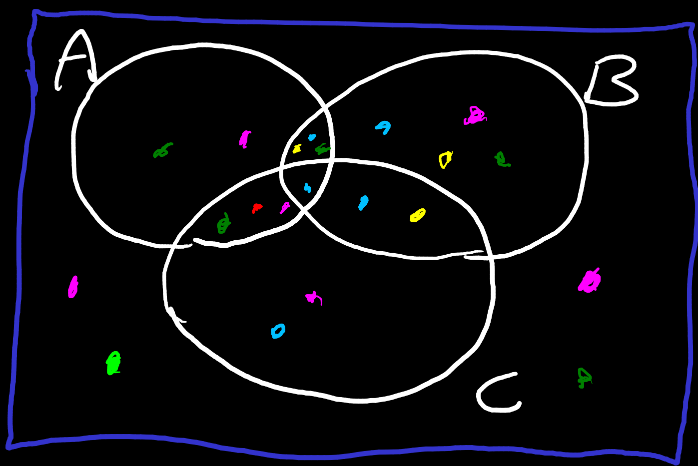
2) $(A \cup B)' \cap C = \{12\}$

3) $(A \cap C)' \cup B = \{2; 3; 4 \ldots; 12; 14; 15\}$





Zakreslete



$(A\setminus B)' \cap (B\cup C)$

$(A\cup B)' \cap (B\cup C)'$

$A' \cap (B\cup C)'$

$(A\cap B')\cap C$

$(A\cap C)'\cap B$

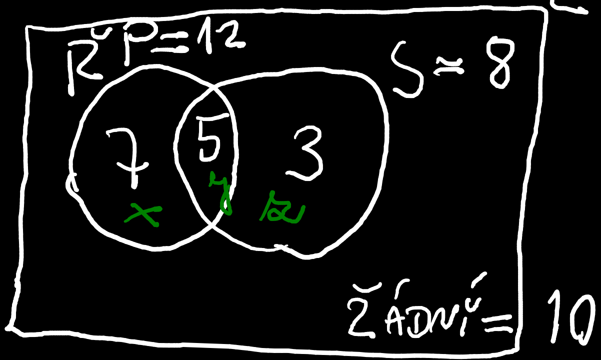
$(A\cup C)'\cup(A\cap B)'$

$(A\cap B')\cup C'$

Slovní úlohy

- Malá firma má 25 zam. z toho 12 má řidičák 8 svářečský pr. a 10 zam. ani jeden průkaz, kolik má oba průkazy zároveň?

$Z = 25$



$x = 7$

$x + y + z = 15$

$z = 3$

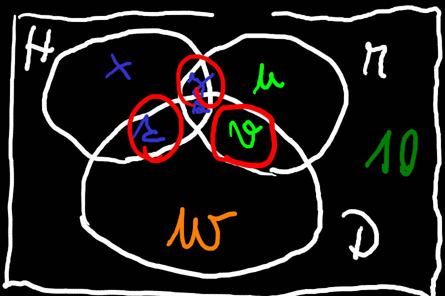
$x + y = 12$

$y = 5$

$y + z = 8$

- Do školy chodí 30 žáků. Hudební kroužek 6 žáků. Do modelářského kroužku chodí o 5 víc než do hudební školy. Dramatický o 3 méně než modelářský. 2 ž. do modelářského i hudebky. Žádný nechodí do dramatického i modelářského. 10 ž. nikam. Kolik navštěvuje 2 ze zmíněných kroužků.

$Ž = 30$



$x + y + z + t = 6$

$y + z + u + v = 11$

$t + z + v + w = 8$

$y + z = 2$

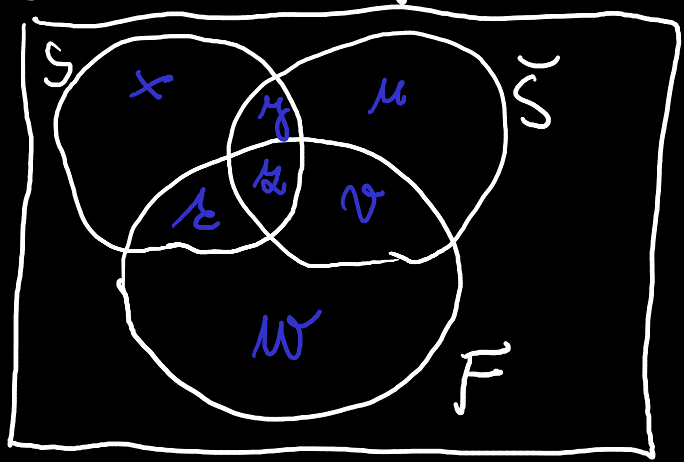
$z + v = 0$

$x = 4;\ u = 9;\ t = 0;\ v = 0;\ w = 5$

$w = 5,\ t = 3,\ x = 1,\ y = 2,\ v = 0$

Každý žák chodí do některého z nich. Foto – 16.
Sport – 17. Šach – 14. $F+S=8$. $F+Š=6$
$S+Š=4$. Kolik je ve třídě?
celkem 3 všechny 3

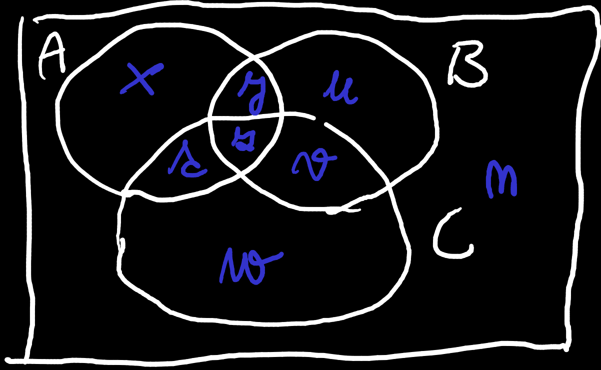
$Ž = ?$



$$z = 3$$
$$t + z = 8$$
$$t = 5$$
$$z + v = 6$$
$$v = 3$$
$$y + z = 4$$
$$y = 1$$

$$x + y + z + t = 17$$
$$x + 1 + 3 + 5 = 8$$
$$u + y + z + v = 14$$

Pražské metro má 3 trasy A, B, C. Průzkum ukázal, že A jezdí 65, trasou B 135 a trasou C 55 zam. Metrem vůbec nejezdí 80. Všechny 3 metra současně nikdo. A a současně B – 40. A i C – 5. Trasami B nebo C – 155. Kolik jezdí pouze B? Kolik jezdí A nebo B? Kolik používá právě 2 trasy? Kolik celkem ve firmě?



$z = 0 \qquad m = 80$

$x + 40 + 0 + 5 = 65$

$40 + u + 0 + v = 135$

$5 + 0 + 155 + w = 55$

$y = 40$

$t = 5$

$u + v = 90$

$x = 20$

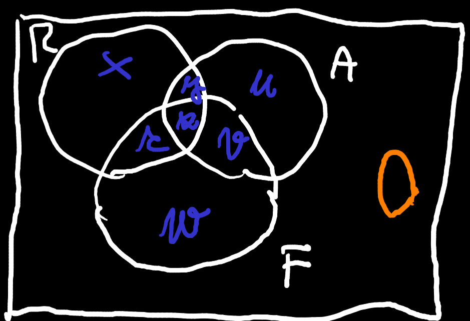
$u + v + w = 110$

$w = 15$

$N = 35$

$M = 60$

Mez. konf. 60 lidí a 3 jednací jazyky. Ruštinu, AJ, a FR. AJ – 32, RU – 36, FR – 28, každý alespoň jedním a jen jedním 24. Kolik jen RU a kolik se muselo z RU překládat.



$x + u + w = 24$

$x + y + z + t = 36$

$t + z + v + w = 28$

$y + u + z + v = 32$

$x + y + z + u + t + v + w = 60$

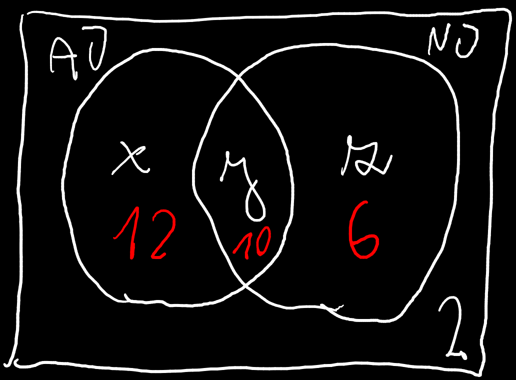
$y + z + t + v = 36$

$36 - t + u = 32$

$36 - y + w = 28$

Z 30 žák. AJ/NJ – 28, 20 nejvýše 1, AJ o 6 žák. víc než NJ

Kolik AJ, AJ i NJ?



$x + 6 = 18$

$x+y+z=28$

$x+z=18$

$y+z+6=x+y$

$z+6=x$

$z+6+z=18$

$2z=12$

$z=6$

Delegátka nabídla 45 úč. 3 výlety.

První výlet 23, první i druhý 7

15 jelo na 1. a nejelo na 3.

10 pouze na 1. a 3 pouze na 3.

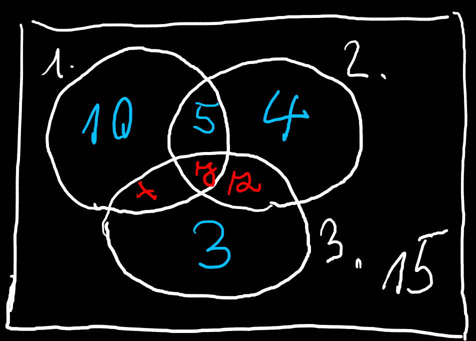
Právě jeden 17. 1/3 se nezúčastnila výletů

Kolik jen 2.? 4

Kolik nárce 2? 11

2. a 3. a zároveň a přitom ne první? 0

45



$1.+2.+3.=30$

$10+5+x+y=23$

$15+x+y=23$

$x+y=8 \Rightarrow 6+2=8$

$8=8$

$5+y=7$

$y=2$

$x=6$

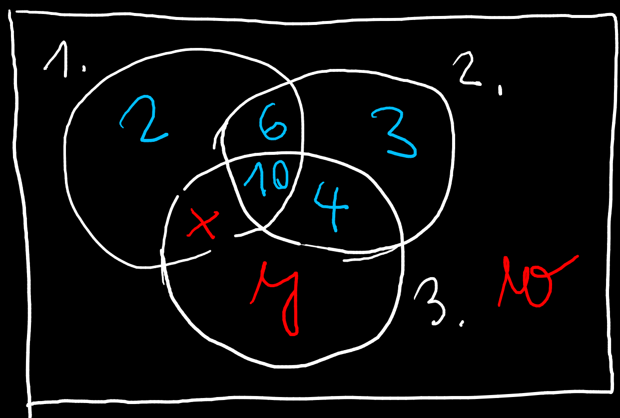
$22+x+y+z=30$

$8+z=8$

$z=0$

Písemná práce z M 35 žk. obsahuje 3 úlohy,
2 žk. pouze první a 3 žk. pouze 2.,
1. a 2. 16 žk., 2. a 3. 14 žk., všechny 10,
1. nebo 3. 31. 3 žk. ani 1. ani 2.
Kolik žk. vyřešilo za a) aspoň 2 úlohy ? 27
b) aspoň 1 úlohu ? 34

TESTOVÍ



$$x + y = 9$$
$$y + w = 3$$

$$25 + x + y + w = 35$$
$$x + y + w = 10$$
$$x + 3 = 10$$
$$\underline{\underline{x = 7}}$$

$$7 + y = 9$$
$$\underline{\underline{y = 2}}$$

$$2 + w = 3$$
$$\underline{\underline{w = 1}}$$

Soustava rovnic

2 neznámé

$$3a - 2b = 5$$
$$7a + b = 6$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \end{array}\right] \cdot(-2) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -4 \\ 0 & -17 & 17 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \cdot(-5) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$a = 1$$
$$b = -1$$

3 neznámé

$$
\begin{aligned}
3x - 2y + z &= -1\\
2x + y - z &= 4\\
4x - 3y + 2z &= -2
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 4 & -3 & 2 & -2 \end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -5\\ 0 & 7 & -5 & 14\\ 0 & 9 & -6 & 18 \end{array}\right]
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 2\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
\qquad
\begin{aligned} x &= 1\\ y &= 2\\ z &= 0 \end{aligned}
$$

MATEMATICKÉ DŮKAZY

Přímý důkaz

Chceme dokázat tvrzení $\underline{\underline{B}}$

Platí $\boxed{A \Rightarrow B}$

V praxi $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \dots X$

Př

$$\sqrt{7+\sqrt{7}} \geqq 1+\sqrt{7-\sqrt{7}} \quad {}^{2}$$

$$\overset{A^2}{7+\sqrt{7}} \geqq \overset{A^2}{1} + \overset{2AB}{2\sqrt{7-\sqrt{7}}} + \overset{B^2}{7-\sqrt{7}} \quad \Uparrow$$

$$2\sqrt{7}-1 \geqq 2\sqrt{7\sqrt{7}} \quad \Uparrow$$

$$4\cdot 7-4\sqrt{7}+1 \geqq 28-4\sqrt{7} \quad \Uparrow$$

$$29 \geqq 28 \quad \Uparrow$$

Př TESTOVÍ

DŮKAZY DĚLITELNOSTI

SUDÉ ČÍSLO ... $2k \quad k\in Z$

LICHÉ ČÍSLO ... $2k+1 \quad k\in Z$

Součet každých 3. (4) po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný 3 (4).

a) $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$

je

b) $n+n+1+n+2+n+3=4n+6=$

$=2(2n+3)$

není

$\forall n$ je číslo $n^3 - n$ dělitelné 6 $\boxed{6 / n^3 - n}$

$$n(n^2-1) = (n-1)n + (n+1)$$

a) JEDNO JE SUDÉ (STAČILY BY 2) $\Rightarrow 2 / n^2 - n$

b) TŘI POSOBĚ JDOUCÍ Č.
JSOU DĚL. 3 $\Rightarrow$

Dokažte, že součet $\forall$ 5 za sebou jdoucích N je dělitelný 5

Dokažte, že součin $\forall$ 5 libovolných N je dělitelný 120

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n + 10 = \underline{5(n+2)}$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$120 = 4 \cdot 30 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

Je dělitelný 4

Je dělitelný 5

VĚTA O ZBYTKU

$\forall n$ lze pomocí $b > 1$

$bk;\ bk+1,\ bk+2;\ \ldots;\ bk+(b-1)\quad k \in N_0$

POUŽITÍ: Chci-li např. dokázat dělitelnost 5 pak si lib. číslo zapíši v jednom z těchto tvarů: $5k;\ 5k+1;\ 5k+2;\ 5k+3$

Dokažte $\forall n$ je číslo n^3+2n dělitelné ③

$$n\left(n^2+2\right)$$

$$(3k)\cdot\left((3k)^2+2\right)=$$

$$(3k+1)\cdot\left((3k+1)^2+2\right)=(3k+1)\left(9k^2+6k+1+2\right)$$
$$3\left(3k^2+2k+1\right)$$

$$(3k+2)\cdot\left[(3k+2)^2+1\right]=$$
$$=(3k+2)\cdot\left(9k^2+6k+4+\right.$$

DŮKAZ MATEMATICKOU INDUKCÍ

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 1+2+3+\dots n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

I. DOKÁŽI PRO $n=1$

$$1=\frac{1\cdot 2}{2}$$
$$\underline{\underline{1=1}}$$

II. PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE TVRZENÍ PLATÍ PRO k A DOKÁŽI, ŽE PLATÍ I PRO $(k+1)$

$$1+2+3+\dots k=\frac{k(k+1)}{2}$$
$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$
$$(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)=\dots$$

...

Dokažte matematickou indukcí, že platí:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

I.

$$2-1=1\ ;\ \underline{\underline{1=1}}$$

II.

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$$

$$k^2+(2\cdot(k+1)-1)=(k+1)^2$$

$$k^2+2k+1=k^2+2k+1$$

$$\underline{\underline{k^2+2k=k^2+2k}}$$

$$\underline{\underline{0=0}}$$

$$1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$$

I.

$$2^0=2^1-1$$

$$\underline{\underline{1=1}}$$

II.

$$1+2+4+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$$

$$2^k-1+2^{k+1-1}=2^{k+1}-1$$

$$\underline{\underline{2^k+2^k=2^k\cdot 2^1}}$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

I.

$$1(2)=\frac{1}{3}\cdot(2)(3)$$

$$2=\frac{6}{3}$$

$$\underline{\underline{2=2}}$$

II.

$$\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+1+1)=\frac{1}{3}(k+1)(k+1+1)(k+1+2)$$

$$\left(\frac{1}{3}k^2+\frac{1}{3}k\right)(k+2)+k+1(1+1)=\frac{1}{3}(k+1)(1+1)(k+3)$$

$$1+3+5+\dots+(2n+1)=(n+1)^2$$

I.

$$1+3=4$$
$$4=4$$

II.

$$(k+1)^2+(2(k+1)+1)=((k+1)+1)^2$$
$$k^2+2k+1+2k+3=k^2+4k+4$$
$$\underline{\underline{k^2+4k+4}}=\underline{\underline{k^2+4k+4}}$$

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$
$$1^2=\frac{6}{6}$$
$$\underline{\underline{1=1}}$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)[2(k+1)+1]}{6}$$

$$k\cancel{(k+1)}(2k+1)+6(k+1)^{\cancel{2}}=\cancel{(k+1)}(k+2)(2k+3)$$

$$2k^2+k+6k+6=2k^2+3k+4k+6$$
$$\underline{\underline{2k^2+7k+6}}=\underline{\underline{2k^2+7k+6}}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

I.
$$\underline{\underline{\frac{1}{2}}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

II.
$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$
$$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$
$$\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)(k+1)}{(k+2)(k+1)}$$

Lineární rovnice

upravíme na tvar $ax=y$

Ekvivalentní úpravy $x=\frac{y}{a}$

1) K oběma stranám rce přičteme stejné číslo

$$2x-7=x+9$$
$$x=16$$

2) $x \neq \pm \frac{1}{3}$

$$3x - 1 = 0$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{12}{1-9x^2} = \frac{1-3x}{1+3x} + \frac{1+3x}{3x-1}$$

PODM.

1) JMENOVATEL $\neq 0$

2) POD ODMOCNINOU NEZÁPORNÉ Č.

$$\frac{12}{1-9x^2} = \frac{(1-3x)(3x-1)+(1+3x)(1+3x)}{(1+3x)(3x-1)}$$

$$\frac{12}{1-9x^2} = \frac{(1-3x)(3x-1)+(1+3x)(1+3x)}{9x^2-1}$$

② LIN. NEROVNICE

- platí totéž, co pro rce + při násobení záporem se obrátí nerovnost

$$-\frac{x}{3} \leq 7 \quad / \cdot (-3)$$

$$x \geq -21 \quad \ldots \langle -21; \infty)$$

$$2(x-1)-x > 3(x-1)-2x-5$$

$$2x-2-x > 3x-3-2x-5$$

$$-2+x > x-8$$

$$x > x-6$$

$$x-x > -6$$

$$\underline{\underline{0 > -6}} \Rightarrow \text{Nek. Ř.}$$

$$P = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

KDYBY VYŠLO

$0 < 0 \ldots P = \emptyset$ ... nemá řeš.

PODÍLOVÝ TVAR

$$\frac{2x-1}{x+4} - 2 \geq 5$$

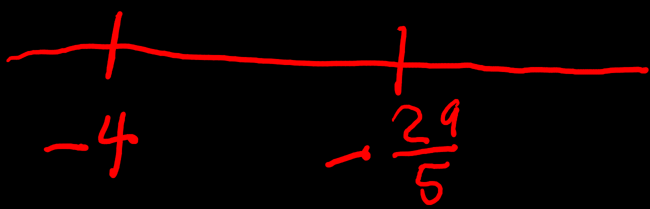
PŘEVEDEME NA TVAR

$$\frac{a}{b} \geq 0$$

$$\frac{2x-1}{x+4} - 7 \geq 0$$

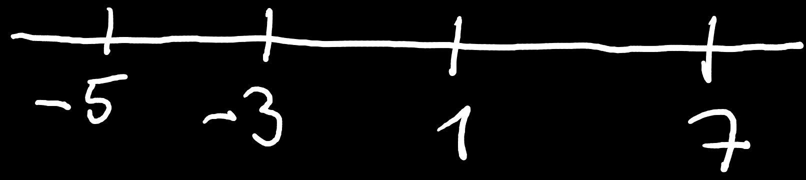
$$\frac{2x-1-7(x+4)}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{-5x-29}{x+4} \geq 0$$



	$(-\infty;-4)$	$(-4;-\frac{29}{5})$	$(-\frac{29}{5};\infty)$
$-5x-29$			$-$
$x+4$			$+$
PODÍL	$-$	$+$	$-$

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+5)(x-7)} \leq 0$$



	$-\infty;-5$	$-5;-3$	$-3;1$	$1;7$
$x-1$			$-$	
$x+3$			$+$	
$x+5$			$+$	
$x-7$			$-$	
PODÍL	$+$	$-$	$+$	$-$

$$P=(-5;-3\rangle \cup \langle 1;7)$$

KVADRATICKÁ RCE

$ax^2+bx+c=0 \quad a,b,c \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$

$2x^2+x=0 \quad a=2,\ b=1,\ c=0$

ŘEŠENÍ POMOCÍ DISKRIMINANTU

$D<0$ NEMÁ ŘEŠ. v $\mathbb{R}$

$D>0$ MÁ 2 ŘEŠ.

$D=b^2-4ac \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$$-2x^2-7x+4=0$$

$$\underline{2x^2+7x-4=0}$$

$$D=7^2-4\cdot2\cdot(-4)$$
$$=49+32$$
$$=81$$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm9}{2\cdot2} \nearrow \frac{-7+9}{4}, \searrow \frac{-7-9}{4}$$

$$\underline{\underline{x_1=\frac{1}{2}}}$$

$$\underline{\underline{x_2=-4}}$$

NEÚPLNÁ

$$ax^2+bx=0$$

$$2x^2-8x=0$$

$$2x(x-4)=0$$

$$x_1=0$$
$$x_2=4$$

VIETOVY VZORCE

⇒ MÁ SMYSL TEHDY, předpokládáme-li celý kořen A u $x^2=1$ (RCE normovaná)

$$x^2+6x+8=0$$

$$(x+A)(x+B)=0$$

HLEDÁME

SOUČET = A

SOUČIN = B

> KOŘENY −A, −B

$(x+2)(x+4)=0$

$x_1=-2$

$x_2=-4$

Př

$x^2-12x-13=0$

$(x-13)(x+1)$

$x_1=13, x_2=-1$

$x^2+4x+4=0$

$(x+2)(x+2)$

$x_{1,2}=-2$

$x^2-13x-30=0$

$(x-15)(x+2)$

$x_1=15, x_2-2$

KVADRATICKÁ NEROVNICE

$ax^2+bx+c \geqq 0$

1) NEJJEDNODUŠŠÍ:

- převedu na tvar $a>0$

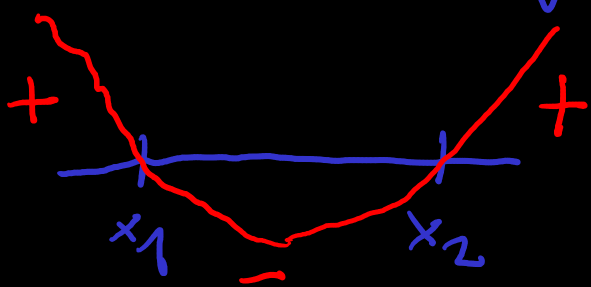
2) Řešíme jako rci

$-2x^2+7x-5 \geqq 0$

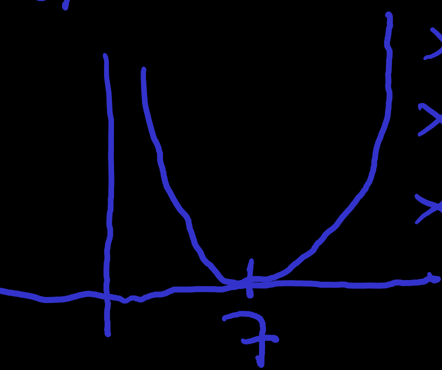
$2x^2-7x+5 \leqq 0$

$\geq$

a) $D>0 \Rightarrow 2$ kořeny



c) $D=0$

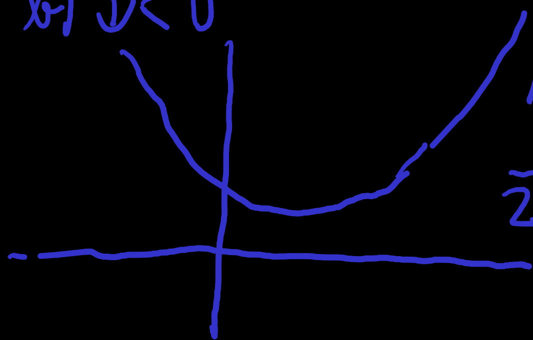


$x<0$

$x \leqq 0$

$x \geqq 0$

b) $D<0$



NEK. NEBO ŽÁDNÝ

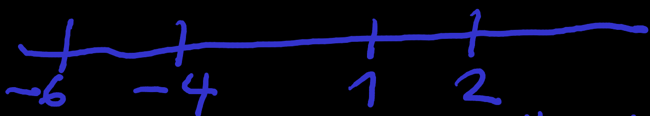
Př řešte kvadr. nerovnici

$$-2x^2+x+3\leq 0$$
$$2x^2-x-3\geq 0$$

$$D=1-4\cdot 2\cdot(-3)$$
$$D=25$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{4} \nearrow x_1=\frac{3}{2}, \quad \searrow x_2=-1$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+10x+24}\leq 0$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+6)(x+4)}\leq 0$$



	$(-\infty;-6)$	$(-6;-4)$	$(-4;1)$	$(1;2)$	$(2;\infty)$
$x-1$			$-$		
$x-2$			$-$		
$x+6$			$+$		
$x+4$			$+$		
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$P=(-6;-4)\cup\langle 1;2)$$

---

m^3+11m $\quad$ $2k$

$m(m^2+11)$

$2k((2k)^2+11)$

$$(2k+1)((2k+1)^2+11)=(2k+1)(4k^2+4k+1+11)=$$
$$=(2k+1)\cdot 2(2k^2+2k+6)$$

PŘÍMÝ DŮKAZ

$$\sqrt{7-\sqrt{7}} \leq \sqrt{7+\sqrt{7}} - 1$$

$$\cancel{7} - \sqrt{7} \leq \cancel{7} + \sqrt{7} - 2\sqrt{7+\sqrt{7}} + 1$$

$$2\sqrt{7+\sqrt{7}} \leq 2\sqrt{7} + 1$$

$$4(7+\sqrt{7}) \leq 4\cdot 7 + 4\sqrt{7} + 1$$

$$28 + 4\sqrt{7} \leq 28 + 4\sqrt{7} + 1$$

$$28 \leq 29$$

$$\forall (x \in \mathbb{R});\ x \geq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \qquad P(A) = 0$$

$$\exists (x \in \mathbb{R});\ x \geq 0 \wedge x^2 \leq 0 \qquad P(A) = 1$$

$$1 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

I

$$1 = \frac{3}{3}$$

II

$$\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2(k+1)-1)^2 = \frac{(2k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}$$

$$\frac{k(2k-1)+3(2k+1)}{3} = \frac{(k+1)(2k+3)}{3}$$

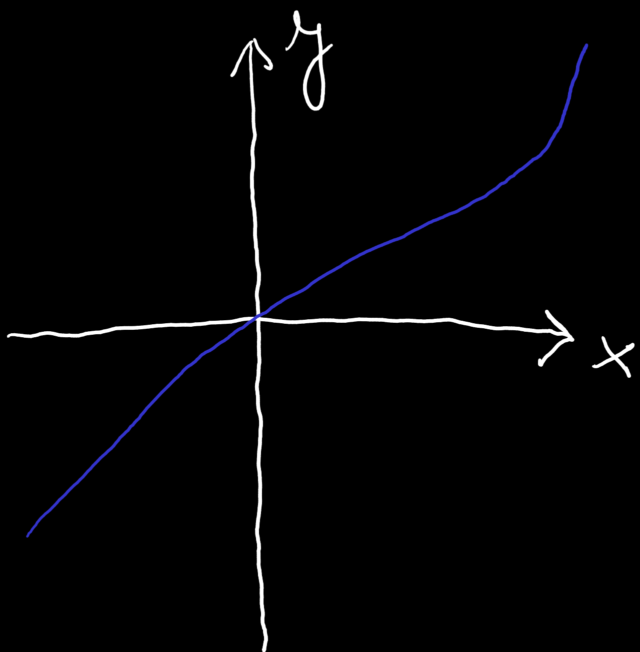
FUNKCE

z podmnožiny $\mathbb{R}$

přiřadíme právě jedno y

- množina, ze které se dosazuje: $\mathcal{D}(f)$ ... nezávisle proměnné
- množina, do které se zobrazuje: $\mathcal{H}(f)$ ... závisle proměnné

GRAF FCE ... $[x, y]$



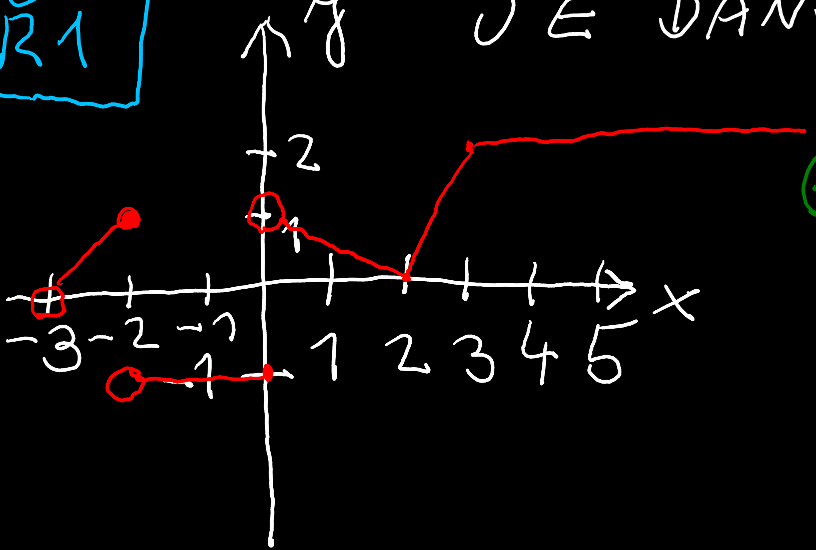
funkční hodnota f v bodě x

$y = f(x)$

Zadání fce ... většinou předpisem

$g: x \to x^2$

PŘ1 JE DÁNA FCE VIZ GRAF



1) $\mathcal{D}(f) = (-3; \infty)$

$\mathcal{H}(f) = \{-1\} \cup \langle 0; +2 \rangle$

② $f(-3) = \nexists$ $f(-1) = -1$ $f(1) = 0{,}5$

$f(-2) = 1$ $f(0) = -1$ $f(5) = 2$

③ určete x tak, aby

$f(x) = 1$; $x = \{-2; 2{,}5\}$

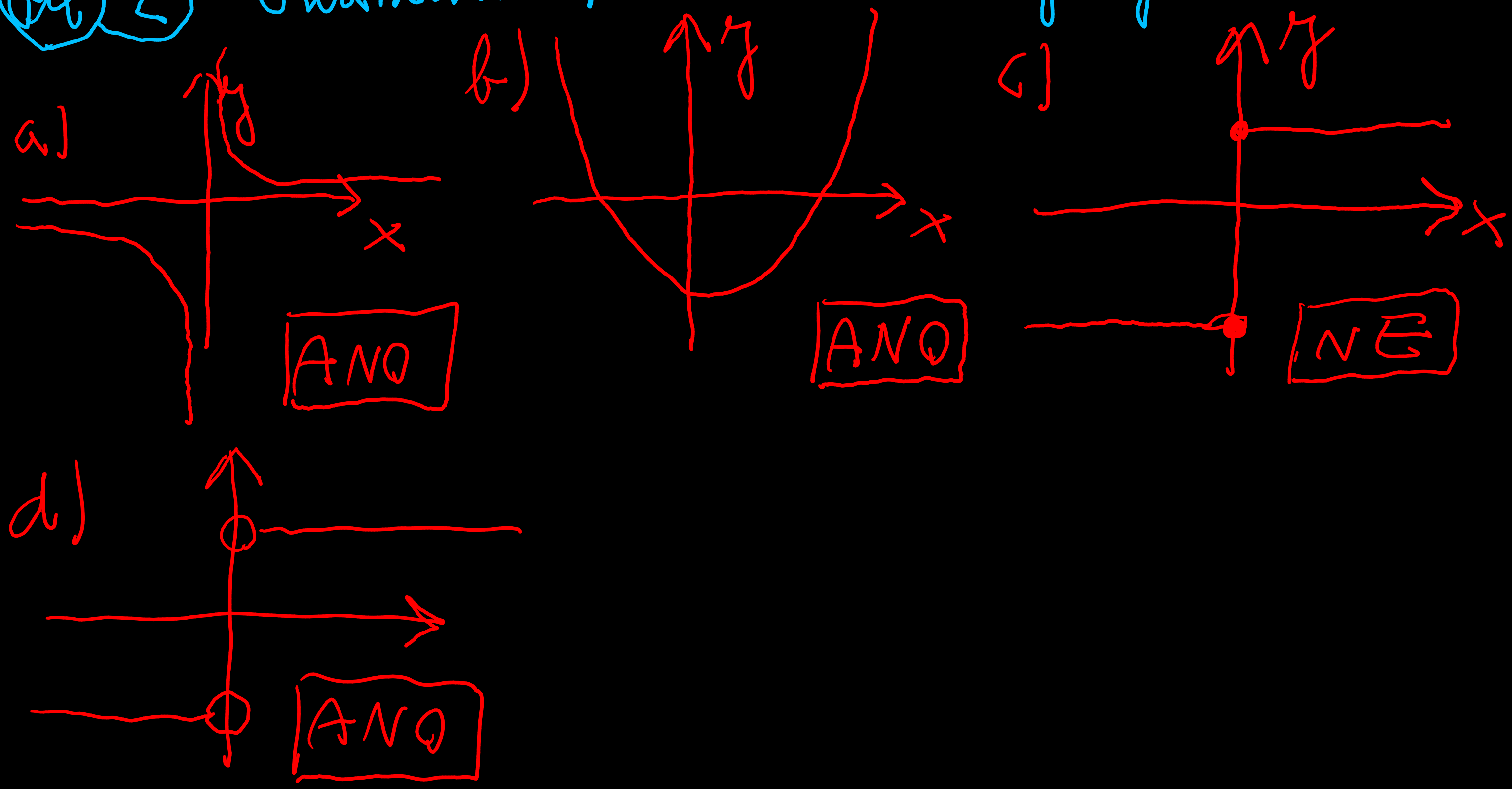
$f(x) = 2$; $x = \langle 3; \infty)$

$f(x) = -1$; $x = (-2; 0\rangle$

$f(x) = 0$; $x = \{2\}$

$f(x) = 5$; $x = \{\ \}$; $\emptyset$

Pří 2 Rozhodněte, zda se jedná o grafy fcí.



PŘ 3

a) VE JMENOVATELI NESMÍ BÝT 0

b) POD ODMOCNINOU ZÁPORNÉ ČÍSLO

Určete definiční obory fcí

a) $y = \dfrac{2}{|x| - 3}$ $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$

b) $y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

c) $y = \sqrt{2-x}$ $\mathcal{D}f = (-\infty; 2\rangle$

$2 - x \geq 0$

$x \leq 2$

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ $\mathcal{D}f = (-3; \infty)$

$x + 3 > 0$

$x > -3$

e) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ $\mathcal{D}f = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

$$\frac{x+1}{x-1} \geq 0$$

	$-\infty; -1$	$-1; 1$	$1; \infty$
$x+1$		+	
$x-1$	+	−	+

f) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-11x+10}}$

	$-\infty; -3$	$-3; -1$	$-1; 1$	$1; 10$
$x+3$			+	
$x+1$			+	
$x-1$			−	
$x-10$			−	
	+	−	+	−

$x^2 + 4x + 3$ $x^2 - 11x + 10$

$(x+3)(x+1)$ $(x-1)(x-10)$

$\mathcal{D}(f) = (-\infty; -3\rangle \cup \langle -1; 1) \cup (10; \infty)$

LIN. FCE

$y = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$

Graf přímka

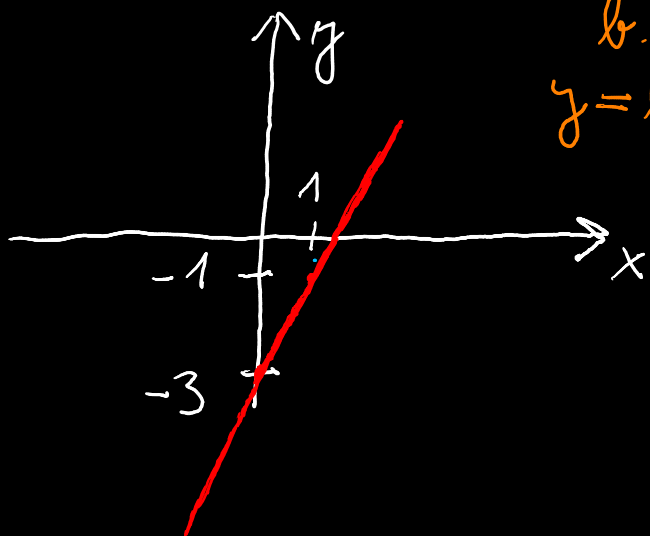
a ... naklání

b ... posouvá

$y = b$ ... konstantní fce

Př

x	0	1
y	-3	-1



Př

Napište př. lin. fce, která prochází body $A = [-1; 5]$

A určete další dva body, nakreslete graf

$B = [2; 3]$

$C = [0; \frac{14}{3}]$

$D = [14; 0]$

$$y = ax + b$$

$$5 = -a + b$$
$$4 = 2a + b$$

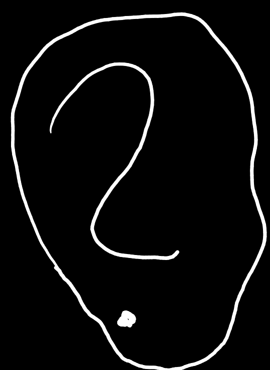
$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{14}{3} \end{array}\right]$$

$$b = \frac{14}{3} \qquad a = -\frac{1}{3}$$

$$a = -b - 5$$

$$a = -\frac{14}{3} - 5$$

$$a = -\frac{14}{3} - \frac{15}{3}$$

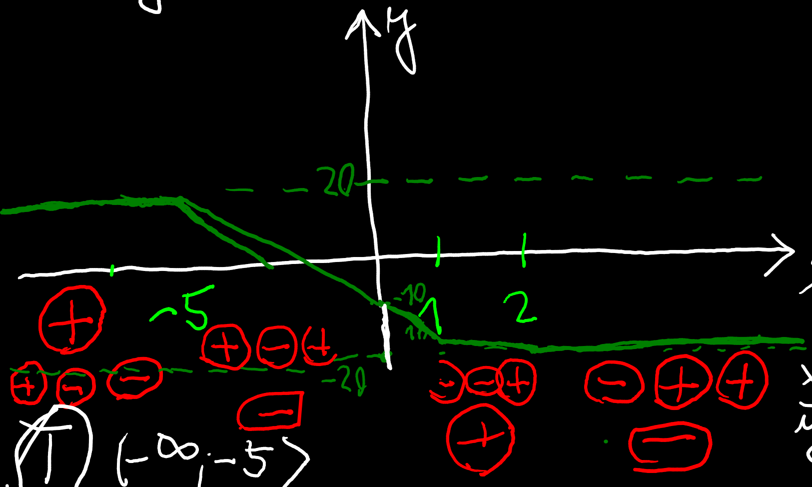


LIN. FCE S ABS. HODNOTOU

$$y = |1-x| + |2x-4| - 3|5+x|$$

1) určujeme kdy jsou vnitřky $= 0$

⇒ intervaly



$\boxed{y=20}$

2) dosadit čísla do všech int.

x	-6	-5
y	20	20

⇒ zjistit znaménka

3) pro každý int. vlastní rci, místo abs. hodnot pouze závorky

– v případě mínus otočit všechna znaménka

I $(-\infty; -5\rangle$

$$y = (1-x) + (-2x+4) - 3(-5-x)$$

II $\langle -5; 1\rangle$ $y = (1-x) + (-2x+4) - 3(5+x)$

$$y = -6x - 10$$

x	-5	1
y	20	-16

III $\langle 1; 2\rangle$ $y = (-1+x) + (-2x+4) - 3(5+x)$

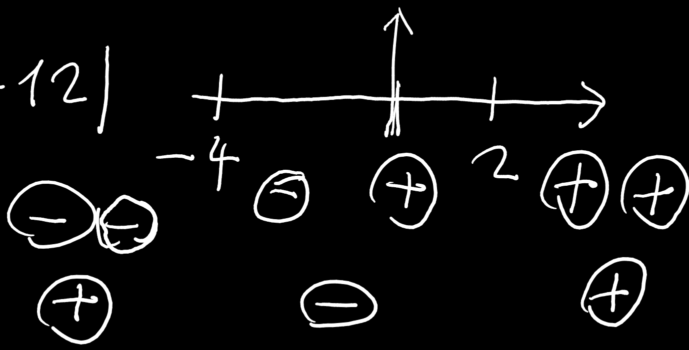
$$y = -4x - 12$$

x	1	2
y	-16	-20

IV $\langle 2; \infty)$ $y = (-1+x) + (2x-4) - 3(5+x)$

$$y = -20$$

$y = |x-2| - |3x+12|$



I $(-\infty; -4)$ $y = (-x+2) - (-3x-12)$

$y = 2x + 14$

x	-10	-4	-5
y	-6	6	4

II $\langle -4; 2)$ $y = (-x+2) - (3x+12)$

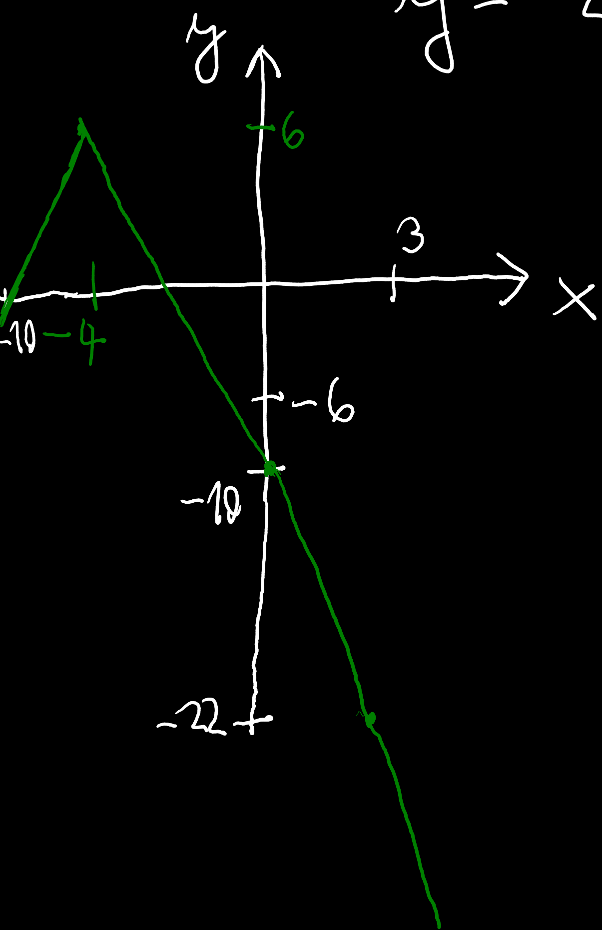
$y = -4x - 10$

x	-4	2	0
y	6	-18	-10

III $\langle 2; \infty)$ $y = (x-2) - (3x+12)$

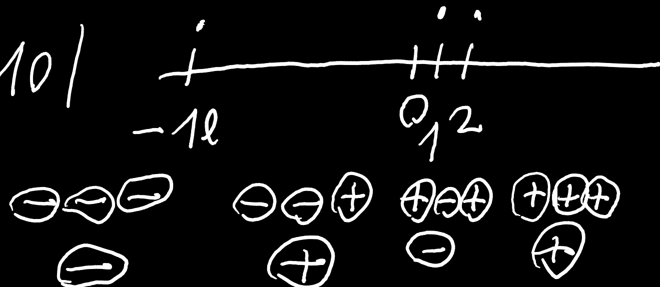
$y = -2x - 14$

x	2	4	10
y	-18	-22	-34



Rovnice + nerovnice s abs. hodnotou

$$3|x-1|+2|x-2|=|x+10|$$



$P_I = (-\infty; -10)$

$= 3(-x+1)+2(-x+2) = (-x-10) =$

$= -5x+7 = (-x-10)$

$= \quad 17 = 4x$

$= \boxed{\frac{17}{4} = x} \Rightarrow P_I = \emptyset$

$P_{II} = \langle -10; -1\rangle$

$= 3(-x+1)+2(-x+2) = x+10$

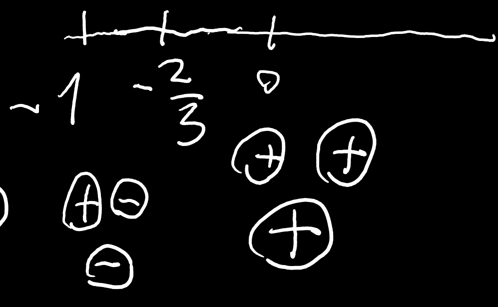
$= -5x+7 = x+10$

$-3 = 6x$

$\boxed{-\frac{1}{2} = x} \quad P_{II} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$P = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{17}{4}\right\}$$

$$3\,|x+1|-|3x+2|<0$$



$(-\infty;-1)$

$$-3x-3+3x+2<0$$

$$\underline{-1<0} \rightarrow P_1=(-\infty;-1)$$

$\langle -1;-\frac{2}{3})$

$$3x+3-(-3x-2)<0$$

$$6x+5<0$$

$$6x<-5$$

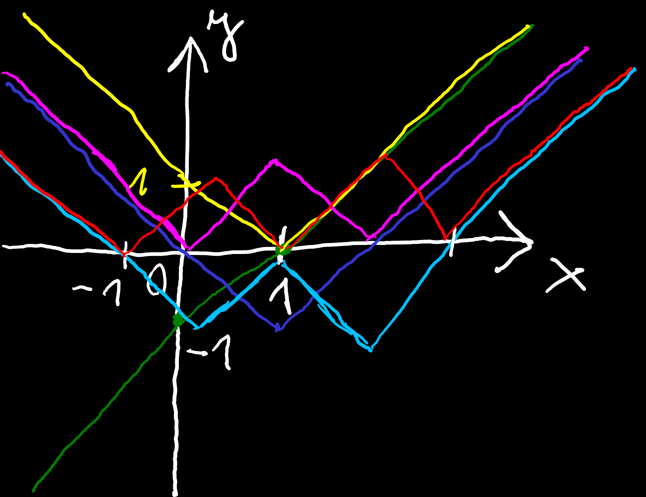
$$x<-\frac{5}{6} \rightarrow P_2=\langle -1;-\frac{5}{6})$$

$$P_3=\emptyset$$

$$P=P_1 \vee P_2 \vee P_3$$

Př

$$y=|||x-1|-1|-1|$$



$y=x-1$

$y=|x-1|$

$y=|x-1|-1$

$y=||x-1|-1|$

$y=||x-1|-1|-1$

$y=|||x-1|-1|-1|$

KVADRATICKÁ RCE

$$ax^2+bx+c=0$$

$$D=b^2-4ac \qquad x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$(x+A)(x+B)=0$$

$$x^2+(A+B)+AB \qquad x_1=-A$$

$$x_2=-B$$

KVADR. FCE

Graf parabola

$$y=ax^2+bx+c=A(x-B)^2+C \qquad V=[B;C]$$

PŘ načrtněte grafy

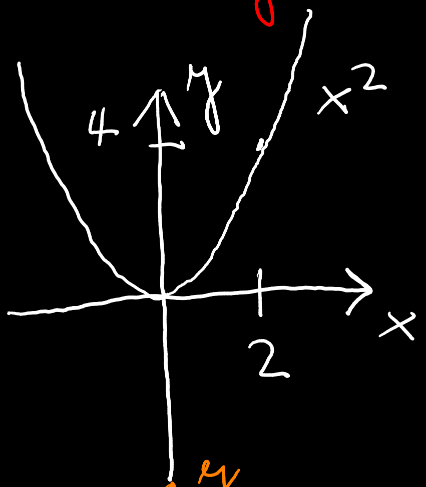
a) $y=x^2$

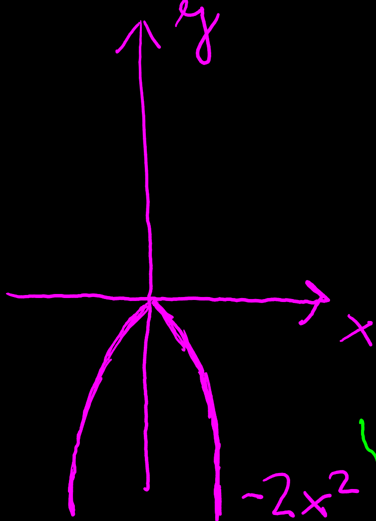
b) $y=-2x^2$

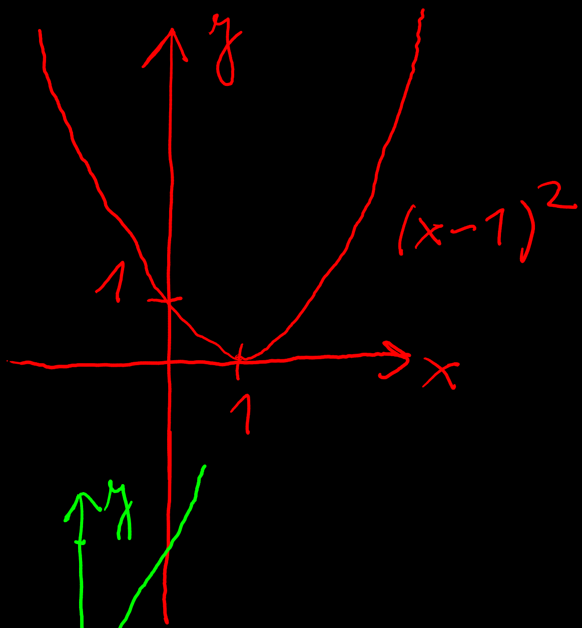
c) $y=(x-1)^2$

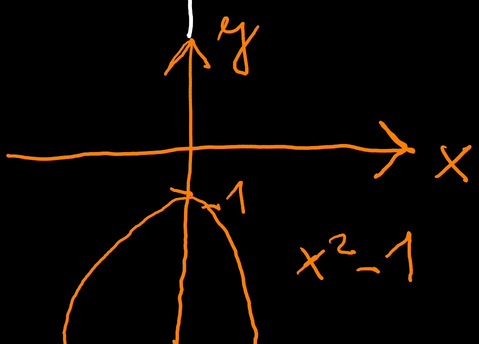
d) $y=x^2-1$

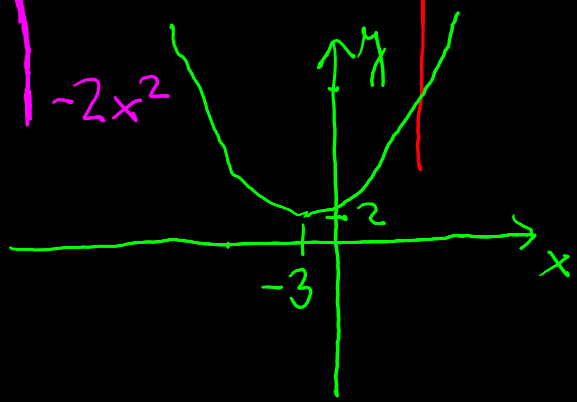
e) $y=2(x+3)^2+2$











Nalezení vrcholu:

$y = x^2 - 6x$

$y = x^2 - 6x + 9 - 9 \quad (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$a = 3$

$a^2 = 9$

$y = (x-3)^2 - 9 \qquad V = [3; -9]$

$y = -2x^2 - 8x + 3$

$y = -2(x^2 + 4x) + 3$

$2a = 4$

$a = 2$

$a^2 = 4$

$y = -2(x^2 + 4x + 4 - 4) + 3$

$y = -2(x+2)^2 + 8 + 3$

$\boxed{y = -2(x+2)^2 + 11}$

$$y = 2x^2 + 5x + 8$$
$$y = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x\right) + 8$$
$$y = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16}\right) + 8$$
$$y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + \frac{64}{8}$$
$$y = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$$

Nakreslení grafu

1) VRCHOL
2) PRŮSEČÍKY S OSAMI

1) ŘEŠÍ SE JAKO ROVNICI, POKUD JE:

$D < 0$ – vrchol hledáme přes DOPLN. NA ÚPLNÝ ČTVEREC

$D = 0$ – máme ihned x-ovou souř. vrcholu

$D > 0$ – můžeme postupovat takto:

$$y = x^2 + 8x + 12$$
$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

$$D = 64 - 48 = 16 > 0$$
$$x_1, x_2 = \frac{-8 \pm 4}{2} < \begin{matrix} -6 \\ -2 \end{matrix}$$

PRŮSEČÍKY S X-OSOU

VRCHOL MUSÍ LEŽET UPROSTŘED

$$\frac{(-2) + (-6)}{2} = -4 = x$$

$$y = (-4)^2 + 8(-4) + 12$$
$$y = 16 - 32 + 12$$
$$y = -4$$

$$V = [-4; -4]$$

PŘ Nakreslete graf fce

$y = -2x^2 + 4x - 3$

$-2x^2 + 4x - 3 = 0$

$2x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0$

$y = -2(x^2 - 2x) - 3$

$y = -2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 3$

$y = -2(x - 1)^2 \quad -1$! $\boxed{2-3}$

$y = -2(x-1)^2 - 1$

$\Rightarrow V = [1; -1]$

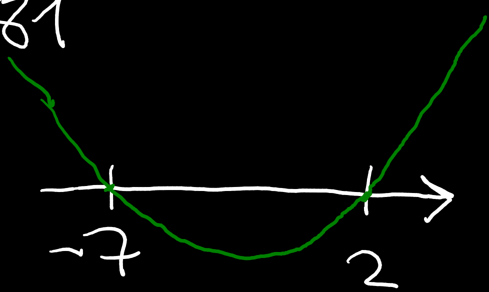
KVADR. NEROVNICE

$-2x^2 - 10x + 28 \geq 0 \quad /:(-2)$

$x^2 + 5x - 14 \leq 0$

$D = 25 - 4 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81$

$x_{1/2} = \dfrac{-5 \pm 9}{2} = \begin{matrix} x_1 = 2 \\ x_2 = -7 \end{matrix}$



$P = \langle -7; 2 \rangle$

$$\frac{x^2-8x+7}{x^2+2x-8} < 0$$

$$\frac{(x-7)(x-1)}{(x+4)(x-2)} < 0$$

$(1;2)$ V $+$

	$(-\infty;-4)$	$(-4;1)$	$(2;7)$	$(7;\infty)$
$x-7$		$-$		
$x-1$		$-$		
$x+4$		$+$		
$x-2$		$-$		
	$+$	$-$ $+$	$-$	$+$

$-4 \quad 1 \quad 2 \quad 7$

$$P=(-4;1)\cup(2;7)$$

Soustava rovnic z nichž aspoň jedna je kvadratická

$$x^2+y^2=100$$

$$3x+4y=50 \Rightarrow x=\frac{50-4y}{3}$$

$$\left(\frac{50-4y}{3}\right)^2+y^2=100$$

$$\frac{2500-400y+16y^2}{9}+y^2=100$$

$$2500-400y+17y^2=900$$

$$1600-400y+17y^2=0$$

$$25y^2-400y+1600=0$$

$$y^2-16y+64=0$$

$$(y-8)(y-8)$$

$$\boxed{y=8}$$

$$x=\frac{50-4\cdot 8}{3}$$

$$x=\frac{50-32}{3} \quad x=\frac{18}{3}$$

$$x=6$$

$$x^2+y^2=421$$

$$xy=210 \Rightarrow x=\frac{210}{y}$$

$$\left(\frac{210}{y}\right)^2+y^2=421$$

$$\frac{44100}{y^2}+y^2=421$$

$$44100+y^4=421y^2$$

$$y^4-421y^2+44100=0 \qquad \boxed{y^2=a}$$

$$a^2-421a+44100=0$$

$$a_{1,2}=\frac{421\pm 29}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow a_1=\underline{225} \\ \searrow a_2=\underline{196} \end{matrix}$$

$$y_{1,2}=\pm 15,\ \pm 14$$

$$x_{1,2}=\pm 14;\ \pm 15$$

<u>4 řešení</u>

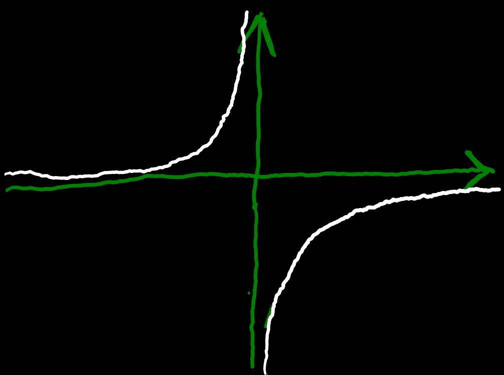
RACIONÁLNÍ FCE
LOMENNÁ

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$
$$c \neq 0$$
$$ad+bc \neq 0$$

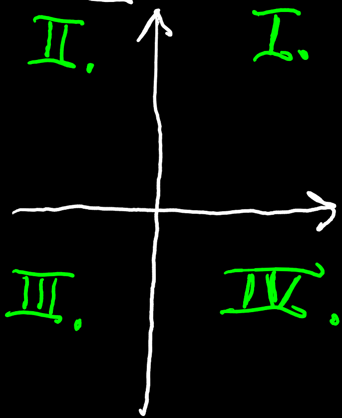
UPRAVIT na tvar

$$y = \frac{A}{x-B} + C \qquad \left.\begin{array}{l} x = B \\ y = C \end{array}\right\}$$ rovnice asymptot (přímky, ke kterým se graf blíží, ale nikdy se jich nedotkne)

Grafem je <u>HYPERBOLA.</u>



$A<0$

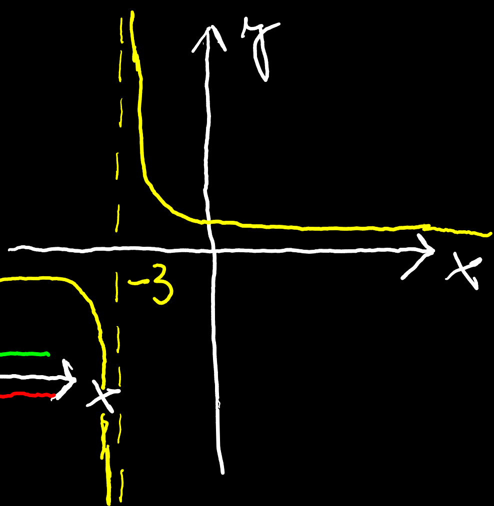


PŘ načrtněte grafy funkcí

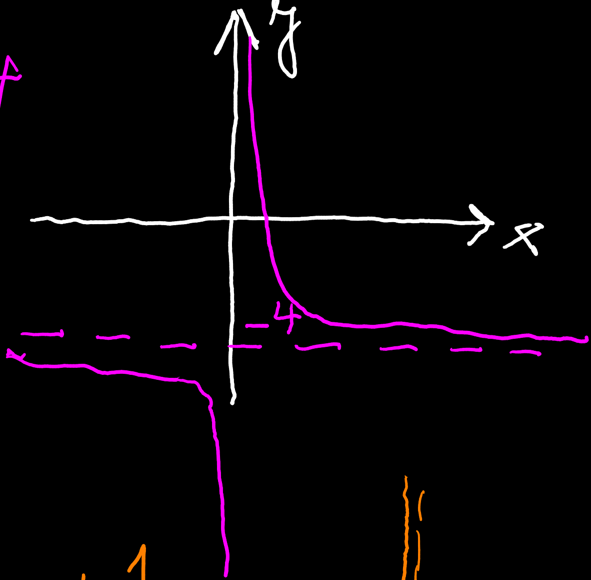
a) $y = \frac{2}{x}$

b) $y = -\frac{1}{x}$

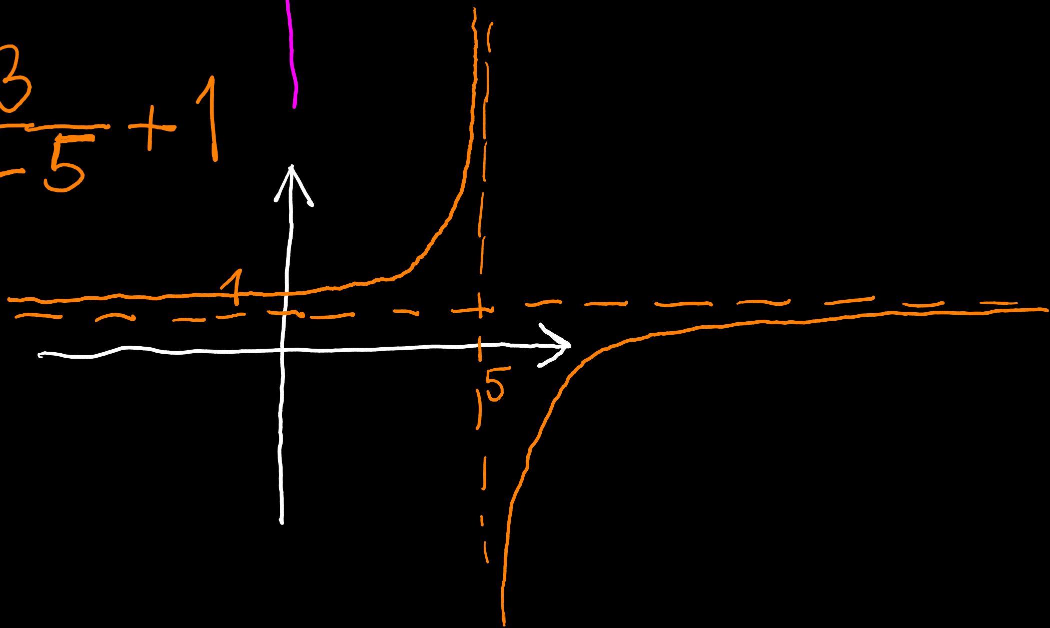
c) $y = \frac{1}{x+3}$



d) $y=\frac{1}{x}-4$



e) $y=\frac{-3}{x-5}+1$



PŘ Je dána rac. fce lomená

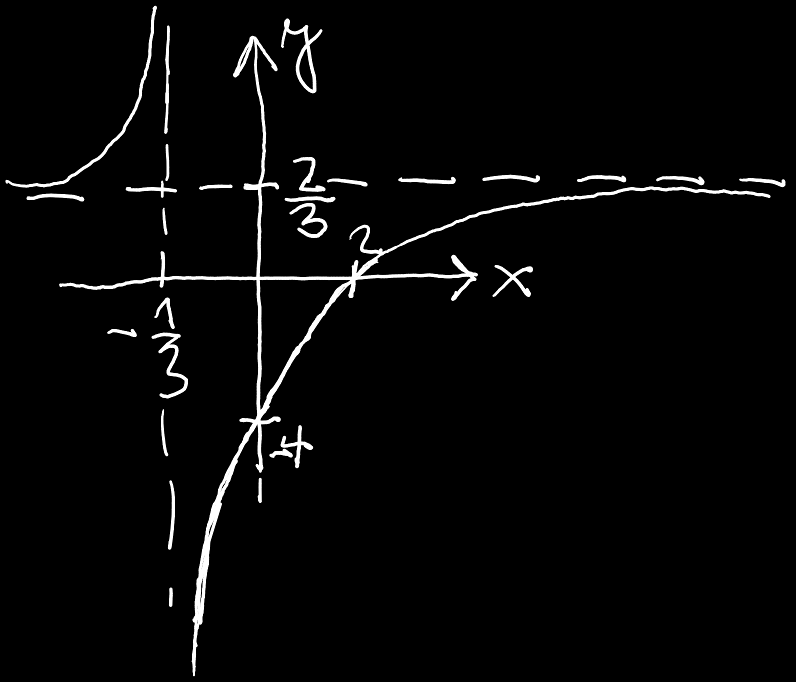
$$y=\frac{2x-4}{3x+1}$$

Určete asymptoty
Načrtněte graf
Určete průsečíky s osami

① $$(2x-4):(3x+1)=\frac{2}{3}-\frac{14}{3(3x+1)}=$$
$$\underline{-\left(2x+\frac{2}{3}\right)}$$
$$=-\frac{14}{9\left(x+\frac{1}{3}\right)}$$

$x=-\frac{1}{3}$
$y=\frac{2}{3}$

② $$y=\frac{2x-4}{3x+1}=\frac{2(x-2)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\frac{2\left(x+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-2\right)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}\dots$$



$$y = \frac{2x-4}{3x+1}$$

$$y = \frac{-4}{1} = -4$$

$$P[0, -4]$$

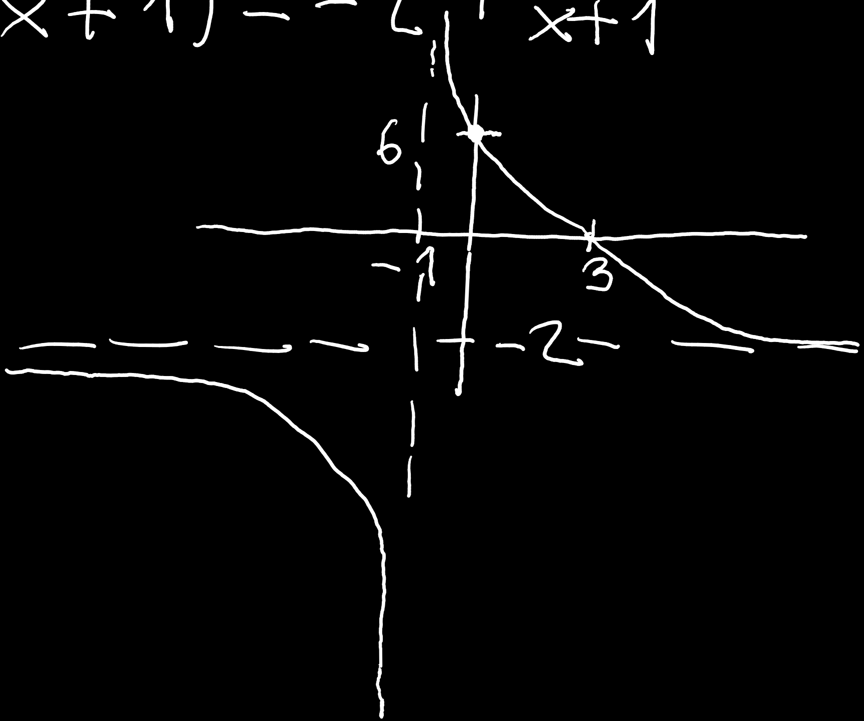
$$y = \frac{-2x+6}{x+1}$$

$$\boxed{P = [0;6], [3;0]}$$

$$0 = \frac{-2x+6}{x+1}$$

$$0 = -2x+6$$

$$(-2x+6):(x+1) = -2 + \frac{8}{x+1}$$



VLASTNOSTI FCÍ

- MONOTONIE – <u>rostoucí</u>

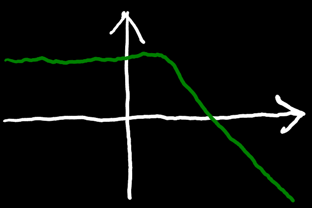
$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{D}(f)$ $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$, $y_1 < y_2$

<u>klesající</u>

$f(x_1) > f(x_2)$

<u>nerostoucí</u>

$f(x_1) \geq f(x_2)$



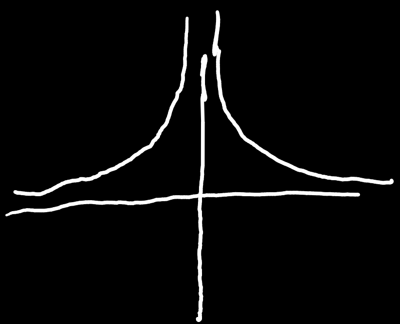
<u>neklesající</u>

$f(x_1) \leq f(x_2)$

<u>OMEZENOST</u>

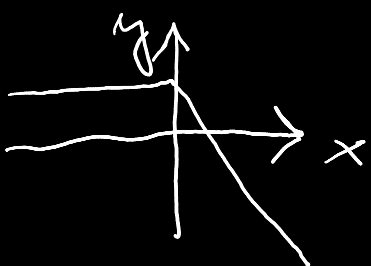
- omezená zdola pokud $\exists\, d \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathcal{D}(f)$ $f(x) \geq d$



<u>Omezená zdola</u>

$\exists\, H \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq H$



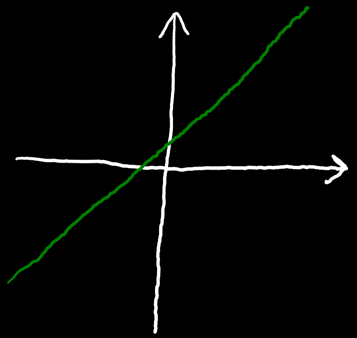
<u>Omezená shora</u>

$\sin(x)$ ... <u>Omezená</u>

$\boxed{\text{SUDÁ}}$ $\forall x \in \mathcal{D}(f)\ \ f(-x) = f(x)$

$\boxed{\text{LICHÁ}}$ $\forall x \in \mathcal{D}(f) = f(-x) = -f(x)$

$\boxed{\text{PROSTÁ}}$ $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{D}(f)$ POKUD $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$



$\boxed{\text{INVERZNÍ}}$ f ... prostá

f^{-1} ... inverzní – x výměna za y

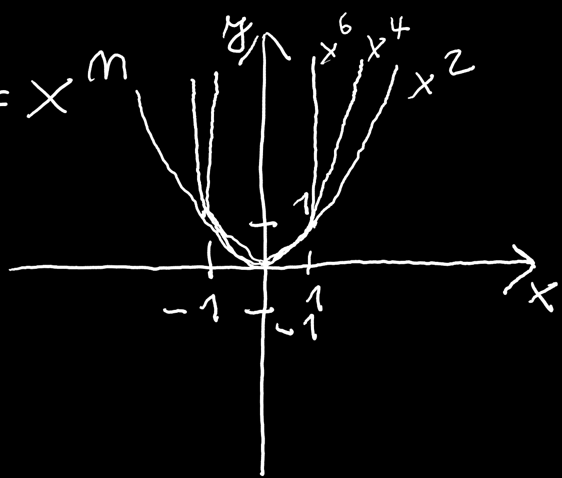
Př $f: y = 2x - 1$ $\qquad f = y = 2^x$

$f^{-1}: x = 2y - 1$ $\qquad f^{-1} = x = 2^y$

$f^{-1} = y = \log_2 x$

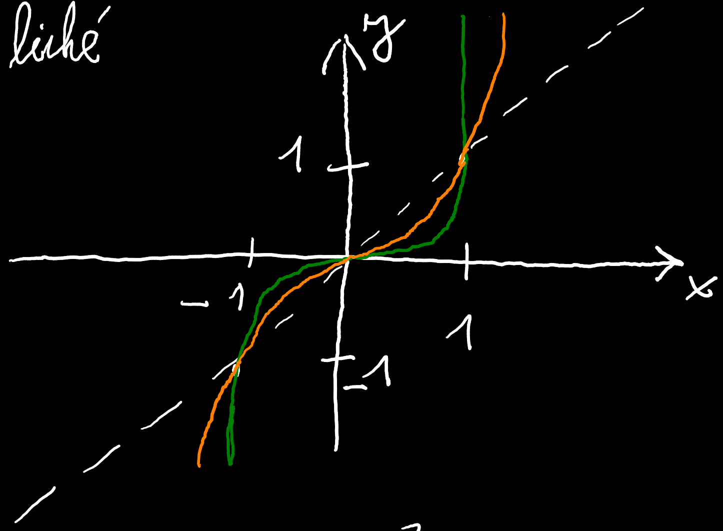
MOCNINNÉ FCE

$y = x^n$

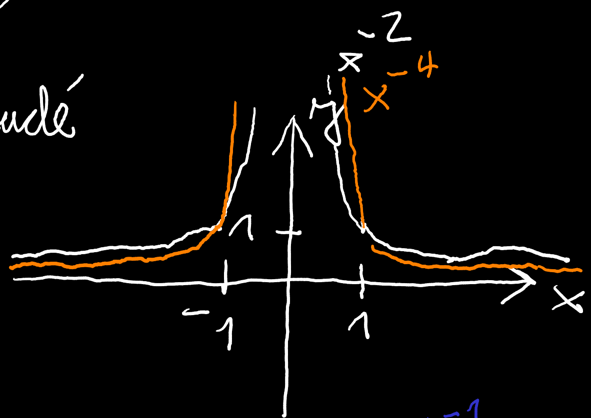


n ... přirozené sudé

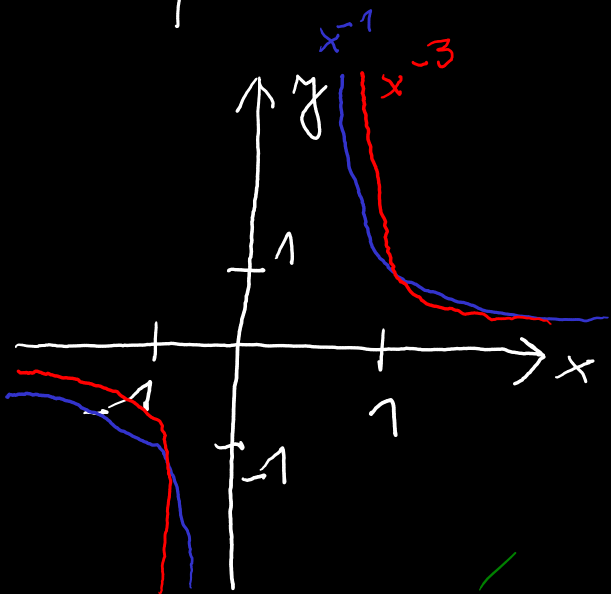
n … přirozené liché



n … záporné sudé



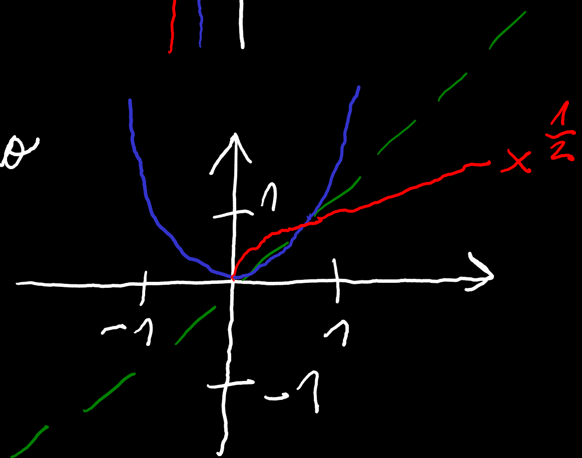
n … záporné liché



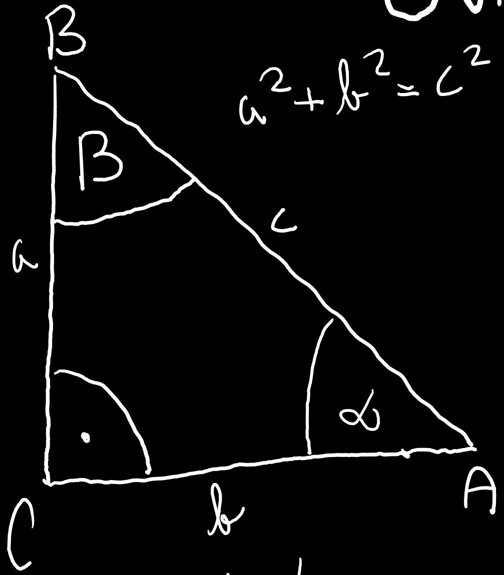
$$\boxed{\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$$

$$\boxed{\mathcal{H}(f) = \mathbb{R} - \{0\}}$$

n … racionální číslo



GONIOMETRIE



$a^2+b^2=c^2$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$
$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$
$cotg\,\alpha = \frac{b}{a}$

$\frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$

$\frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}}$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha}$$

$$\underline{\underline{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \underline{\underline{1}} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

Př. ① Určete gon. hodnoty funkcí pro úhly $\alpha = 30°; 45°; 60°$

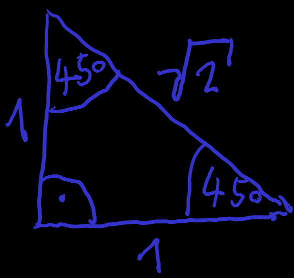
$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 30° = \cos 60°$

$\cos 30° = \sin 60°$

$tg\,30° = cotg\,60°$

$cotg\,60° = tg\,30°$



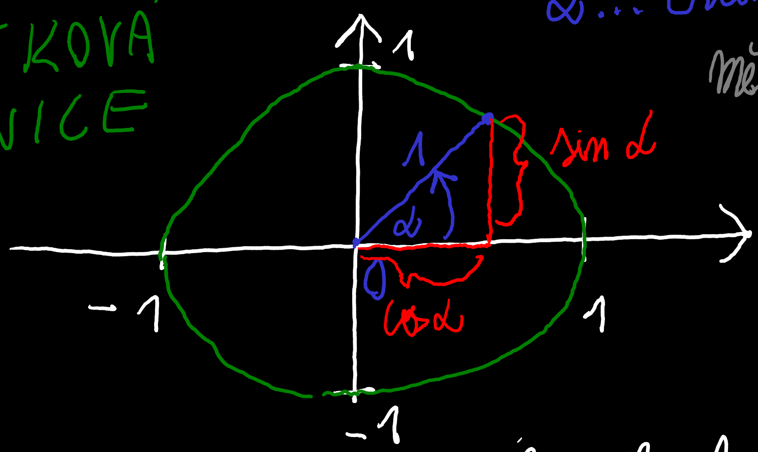
α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$cotg\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Definice gon. fcí pro lib. úhel

Jednotková kružnice

α … orientovaný úhel

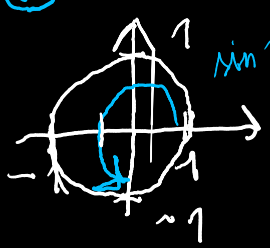
měříme kladně proti směru pohybu hodinových ručiček



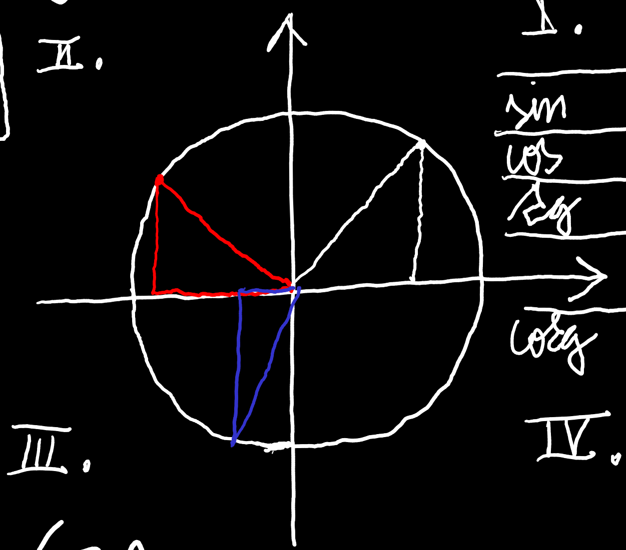
sin α odpovídá y souřadnici příslušného bodu na jedn. kruž.

cos α odpovídá x ——— || ———

Př:

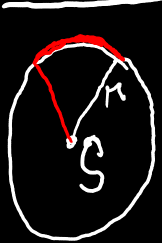


Znaménka goniometrických fcí



	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
cotg	+	−	+	−

Oblouková míra



$d = 2\pi r$

$2\pi \dots 360°$

$\pi \dots 180°$

$\frac{\pi}{2} = 90°$ $\quad \frac{\pi}{3} = 60°$

$\frac{\pi}{4} = 45°$ $\quad \frac{\pi}{6} = 30°$

$50°$ $\quad \pi \ldots 180°$

$x \ldots 50°$

$$x = \frac{\pi \cdot 50}{180} = \frac{5}{18}\pi$$

$\frac{7\pi}{8} \quad x$

$\pi \quad 180°$

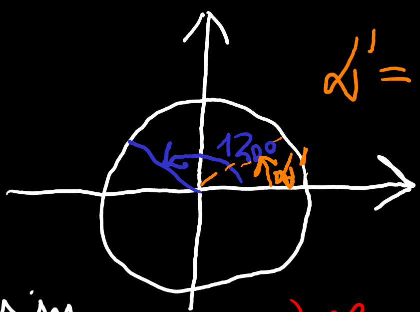
$$x = \frac{180 \cdot \pi}{\frac{7\pi}{8}}$$

$x \doteq 161°$

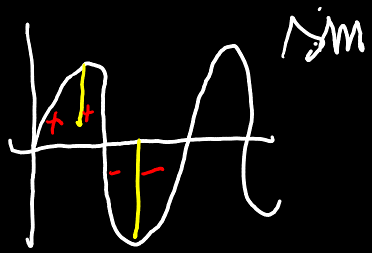
Př. URČETE HODNOTY TĚCHTO GON. FCÍ

1) náčrtek
2) pomocný úhel v I. kv.

1) $\sin 120°$



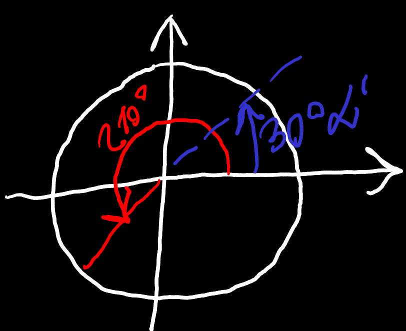
$\alpha' = 60° \doteq \frac{\sqrt{3}}{2}$



3) znaménko

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120°$

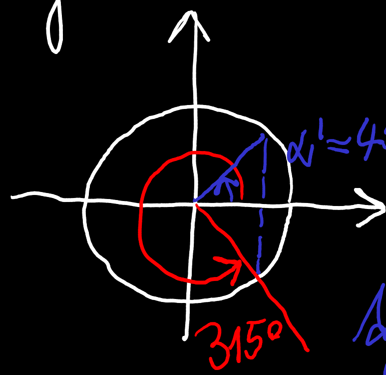
2) $\cos 210°$



$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\operatorname{tg} 315°$



$\alpha' \doteq 45°$

$\operatorname{tg} 45° = 1$

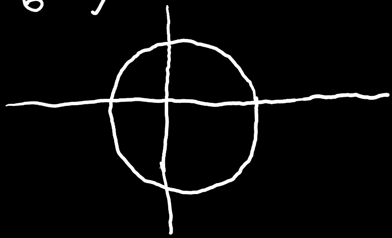
$\operatorname{tg} 315° = -1$

$870 - 2\cdot 360 = 150^\circ$

$\sin 870^\circ = \sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos \frac{21\pi}{6} = \cos\left(\frac{21\pi}{6} - \frac{12\pi}{6}\right) = \cos \frac{9}{6}\pi = \cos \frac{3}{2}\pi = \cos 270^\circ = 0$

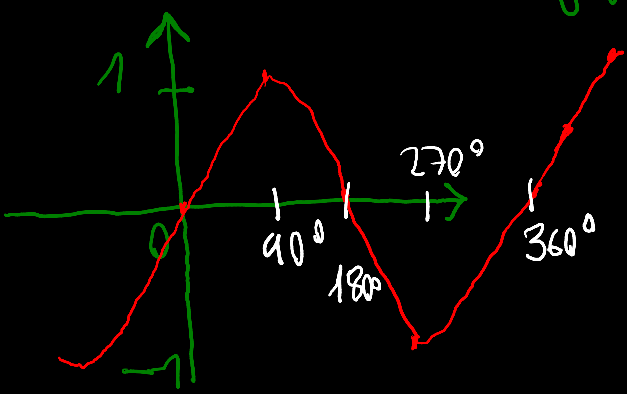
$\operatorname{tg} 12\pi = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$



$\operatorname{cotg} 1935^\circ = \operatorname{cotg} 135^\circ = -1$

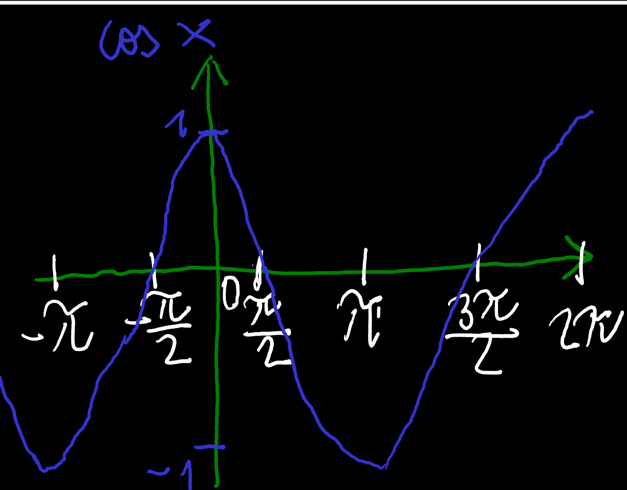
$\operatorname{cotg} 45^\circ = 1$

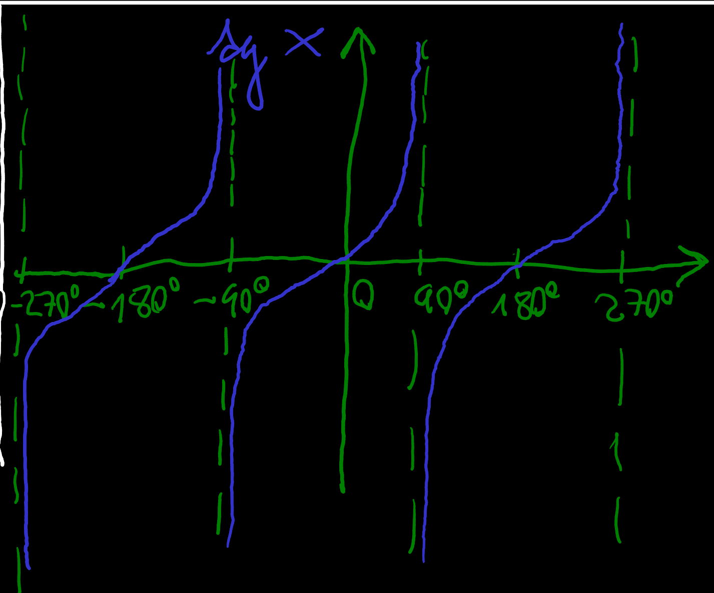
Grafy gon. fcí

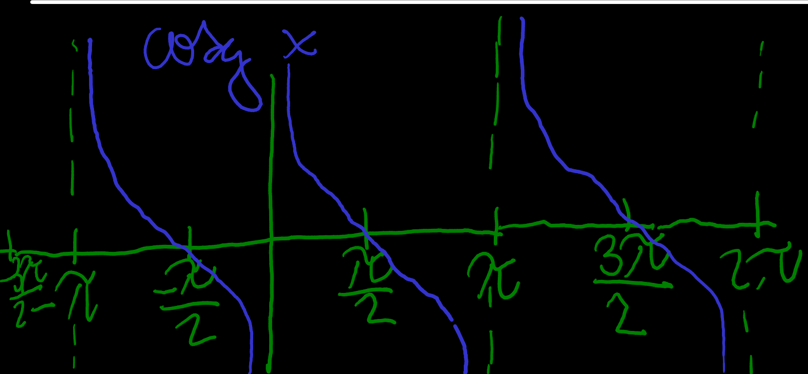


$D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$







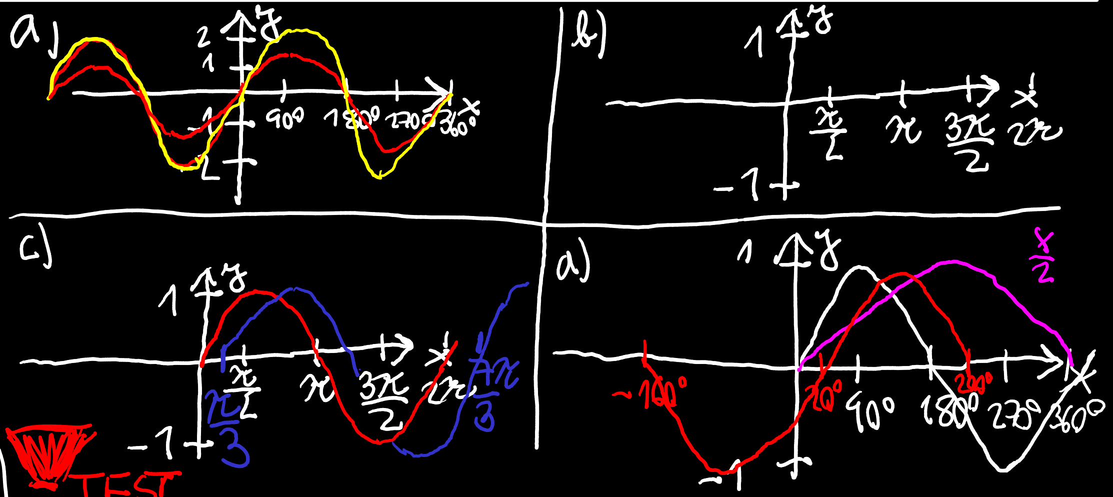
a) $2(\sin x)$

b) $\sin 2x$

c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

d) $\sin\left(\frac{x}{2} + 80°\right)$ TEST

$= \sin \frac{1}{2}(x + 160°)$



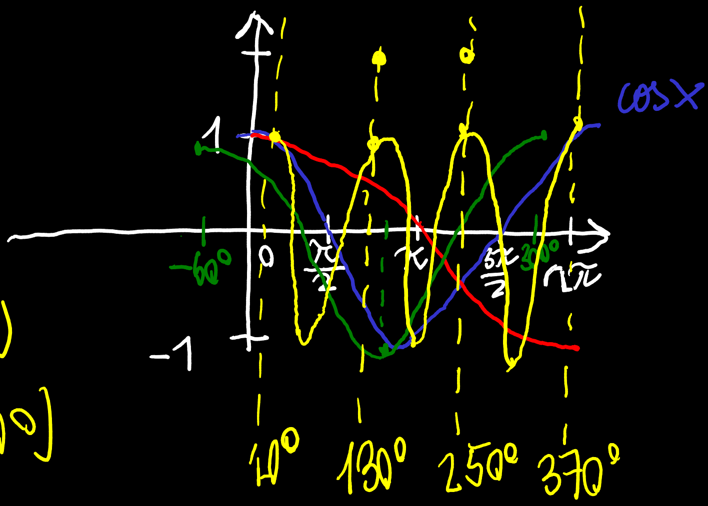
Př načrtněte

a) $\cos \frac{x}{2}$

b) $\cos(x + 60°)$

c) $\cos(3x - 30°)$

$\cos 3(x - 10°)$



ÚPRAVY GONIOM. VÝRAZŮ

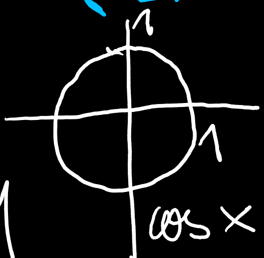
$\sin x = \frac{15}{17}$ $\quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\frac{225}{289} + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \frac{225}{289} =$

$= \boxed{\cos = -\frac{8}{17}}$



$\cos x$ ⊖

$\operatorname{tg} x$ ⊖

$\operatorname{cotg} x$ ⊖

$\boxed{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{15}{17}}{-\frac{8}{17}} \boxed{= -\frac{15}{8}}$

$\boxed{\operatorname{cotg} = -\frac{8}{15}}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\operatorname{ctg} x = 2 \qquad x \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ $\quad \begin{cases} \sin - \\ \cos - \\ \operatorname{tg} + \end{cases}$

$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\dfrac{\cos x}{\sin x} = 2 \Rightarrow \cos x = 2\sin x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$4\sin^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{5}$

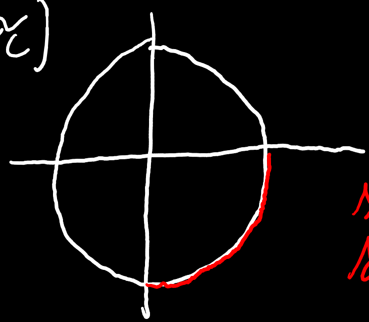
$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{\cos x}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2$

$\cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$

$\cos x = +\frac{3}{5} \qquad x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$



$\sin = -$

$\operatorname{tg} = -$

$\operatorname{ctg} = -$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$

$\sin^2 x = \frac{16}{25}$

$\sin x = -\sqrt{\frac{16}{25}}$

$\sin x = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$ $\qquad \operatorname{ctg} x = -\frac{15}{20} = -\frac{3}{4}$

$\operatorname{tg} x = -\frac{20}{15} = -\frac{4}{3}$

ÚPRAVY GONIOM. VÝRAZŮ

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(1)

$$\sin^2 \overset{\cos x}{x} + \cos^3 x =$$

$$\cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos x$$

(2)

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\operatorname{tg}^2 x}}$$

(3)

$$\frac{\sin x \cos 2x}{\cos x \sin 2x} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{tg} x \, \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \left(\frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} - \frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cos x} \right) = \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

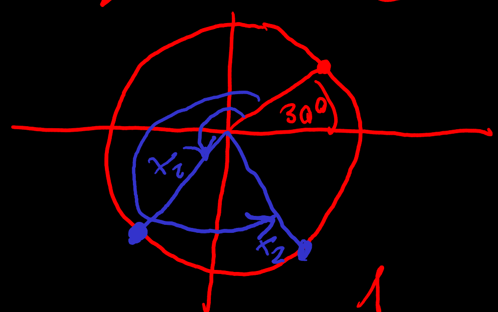
$$= \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{2} \operatorname{cotg} x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x (\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x)$$

GONIOMETRICKÉ RCE

(1) $\sin x = -\frac{1}{2}$

1) POMOCNÝ $\measuredangle$ v I. KV.

$\sin x' = \frac{1}{2}$

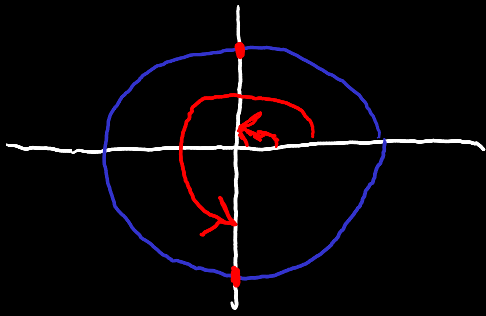


2) SKUTEČNÝ $\measuredangle$ x ... $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = 210° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}$

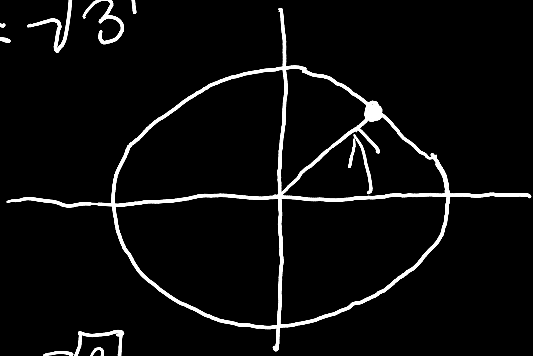
$x_2 = 330° + k \cdot 360°;\ k \in \mathbb{Z}$

② $\cos x = 0$



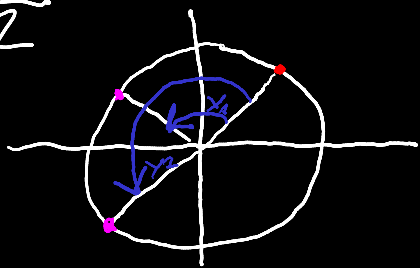
$$\boxed{x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ}$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

③ $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$



$$x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$$

4) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

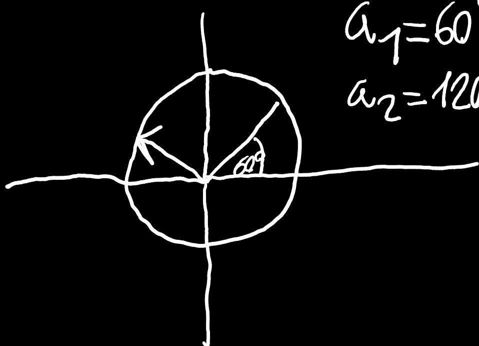


$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_1 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

TESTOVÝ:

$$\sin(2x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$a = 2x - 30^\circ \qquad \sin(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ a_2 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned}\right\} k \in \mathbb{Z}$$

$$60^\circ + k \cdot 360^\circ = 2x_1 - 30^\circ$$
$$2x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$\boxed{x_1 = 45^\circ + k \cdot 180^\circ}$$

$$120^\circ + k \cdot 360^\circ = 2x_2 - 30^\circ$$
$$2x_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$x_2 = 75^\circ + k \cdot 180^\circ$$

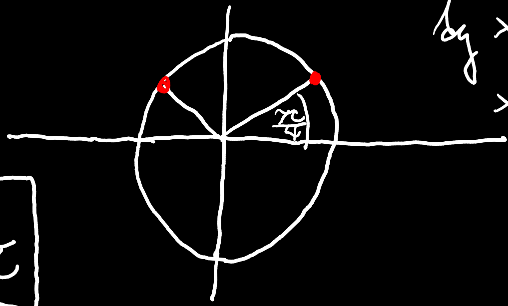
$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \qquad a=\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{tg} x'=1$$

$$x'=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(a)=-1}$$

$$\boxed{y=\frac{3\pi}{4}+k\cdot\pi}$$



$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+k\cdot\pi$$

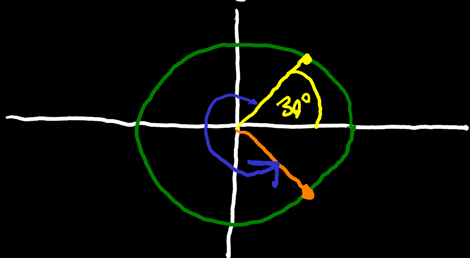
$$\frac{x}{2}=\frac{9\pi-2\pi}{12}+k\cdot\pi$$

$$x=2\cdot\frac{7\pi}{12}+k\cdot\pi$$

$$x=\frac{7}{6}\pi+k\cdot\pi$$

$$\cos\left(\frac{x}{3}+300^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad y=\frac{x}{3}+300^\circ$$

$$\cos(y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$y_1=$$

$$y_2=330^\circ+k\cdot360^\circ$$

$$\frac{x_1}{3}+300^\circ=30^\circ+k\cdot360^\circ$$

$$\frac{x_1}{3}=-270^\circ+k\cdot360^\circ$$

$$x_1=-810^\circ+k\cdot1080^\circ$$

$$x_1=270^\circ+k\cdot1080^\circ$$

$$\frac{x_2}{3}+300^\circ=330^\circ+k\cdot360^\circ$$

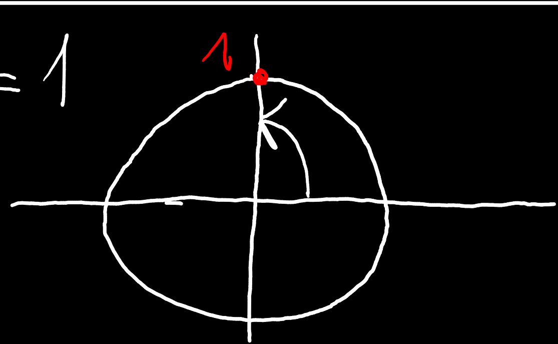
$$\frac{x_2}{3}=30^\circ+k\cdot360^\circ$$

$$x_2=90^\circ+k\cdot1080^\circ$$

$$\sin\left(4x+\frac{5}{3}\pi\right)=1$$

$$a=\left(4x+\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$\sin(a)=1$$



$$a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$4x + \frac{5}{3}\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$4x = \frac{3\pi - 10\pi}{6} + 2k\pi$$

$$4x = \frac{-7\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = -\frac{7}{24}\pi + \frac{k\pi}{2}$$

$$x = \frac{5}{24}\pi + \frac{k\pi}{2}$$

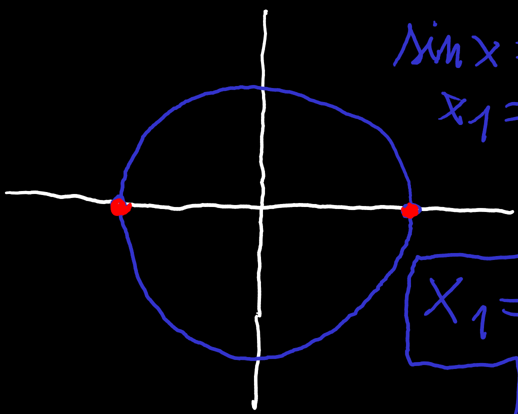
---

2. TEST

SUBST. NEBO VYTKNUTÍ

$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\underbrace{\sin x}_{=0}\,\underbrace{(2\sin x - 1)}_{=0} = 0$$



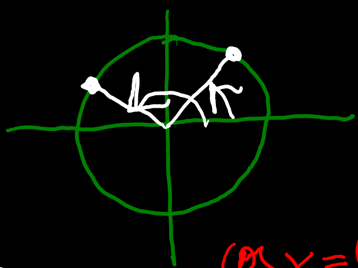
$\sin x = 0$

$x_1 = 0° + k \cdot 180°$

$$\boxed{x_1 = k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}}$$

$2\sin x - 1 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

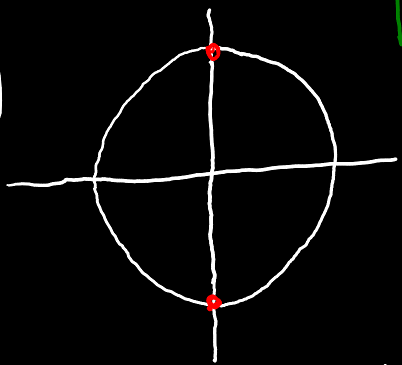


$x_2 = 30° + k \cdot 360°$

$x_3 = 150° + k \cdot 360°$

$$2\cos x + \cos^2 x = 0$$

$$\underbrace{\cos x}_{=0}\,\underbrace{(2 + \cos x)}_{=0} = 0$$



$\cos x = 0$

$x = 90° + k \cdot 180°$

$2 + \cos x = 0$

$\cos x = -2$

NEMÁ ŘEŠ!

$\sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0 \qquad a = \sin x$

$a^2 + 2a - 3 = 0 \qquad a = -3 \Rightarrow NR$

$(a+3)(a-1) = 0 \qquad a = 1 \Rightarrow \sin x = 1$

$\boxed{x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ}$

Pr

$6\sin^2 x - 7\cos x - 1 = 0$

$6(1-\cos^2 x) - 7\cos x - 1 = 0 \qquad \cos x = a$

$6 - 6\cos^2 x - 7\cos x - 1 = 0$

$-6\cos^2 x - 7\cos x + 5 = 0$

$6a^2 + 7a - 5 = 0$

$D = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-5)$

$D = 169$

$\sqrt{D} = 13$

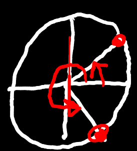
$x_1, x_2 = \dfrac{-7 \pm 13}{2 \cdot 6}$

$\dfrac{-20}{12} = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3}$

$\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

I. $\cos x = -\frac{5}{3} \Rightarrow$ NE IDE

II. $\cos x = \frac{1}{2}$



$x_1 =$

$x_2 = 300^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$

$3\sin x = 2\cos^2 x$

$3\sin x = 2(1 - \sin^2 x)$

$3\sin x = 2 - 2\sin^2 x$

$0 = 2 - 2\sin^2 x - 3\sin x \qquad \sin x = a$

$$0 = 2a^2 + 3a - 2$$

$D = 25$

$x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $x_1 = 30° + k \cdot 360°, k \in Z$

$x_2 = 150° + k \cdot 360°, k \in Z$

$x_2 = -2 \Rightarrow$ NŘ

$\mathrm{tg}\, x = y$

$\mathrm{cotg}\, x = \frac{1}{y}$

$$2\,\mathrm{tg}\, x + 4\,\mathrm{cotg}\, x = 9$$

$$2y + \frac{4}{y} = 9 \quad / \cdot y$$

$$2y^2 + 9y + 4 = 0$$

$D = 49$

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{4} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$$

I $\quad \mathrm{tg}\, x = 4$

$x_1 = \mathrm{arctg}\, 4 + k \cdot \pi$

$x_2 = \mathrm{arctg}\, \frac{1}{2} + k \cdot \pi$

Př

$$\sin x + \cos x - 1 = 0$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} + \cos x - 1 = 0$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\cos x + 1$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$$

$$2\cos x - 2\cos^2 x = 0 \qquad \cos x = a$$

$$2a - 2a^2 = 0$$

$$2a^2 - 2a = 0$$

$$2a(a - 1) = 0$$

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

PODOBNĚ

$\sin x = 0{,}21$

$x = \arcsin 0{,}21 + 2k\pi$

$\boxed{1 + 0 - 1 = 0}$ ✓

I $\quad \cos x = 0$

$x_1 = 90° + k \cdot 360°$ } $k \in Z$

$x_2 = 270° + k \cdot 360°$

$x_3 = 0 + k \cdot 360°;\ k \in Z$

NŘ $\quad -1 + 0 - 1 = 0$

ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$ stupeň $P <$ stupeň Q

$$\frac{x^5+7}{2x^7-x^6+x}$$

– Jmenovatel rozložíme na ireducibilní faktory (činitele)

$$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x^2+\alpha_1 x+\ldots)^{n_1}\;(x^2+\alpha_2 x+\ldots)^{n_{\ldots}}\ldots$$

PRO KAŽDÝ FAKTOR $(x-a)^n$

$$\frac{A}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\ldots+\frac{a_n}{(x-1)^n}$$

$$(x^2+\alpha x+\beta)^n$$

$$\frac{B_1 x}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1}+\frac{B_2 x}{x^2+\alpha_2 x+\beta_2}+\ldots+\frac{B_n x+C}{(x^2+\alpha x_n x+\beta_n)^n}$$

Př.

$$\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)(x+4)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-3)}+\frac{C}{(x+4)}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+3}$$

$$\frac{x^3-x^2+x-1}{x^3(x-1)(x^2+5)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{Ex+F}{x^2+5}+\frac{Gx+H}{(x^2+5)^2}$$

$$\frac{x}{(x-1)^3(x+8)^2(x^2+1)^2(x^2+4)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{(x+8)}+\frac{E}{(x+8)^2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)}+\frac{Hx+I}{(x^2+1)^2}+\frac{Jx+K}{(x^2+4)}$$

Př 1

$$\frac{x+5}{x^2-2x-3}=\frac{x+5}{(x+1)(x-3)}$$

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$$

NÁSOBÍCÍ METODA

$$\frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$

$$1=A+B$$
$$5=A-3B$$
$$8=4A\Rightarrow A=2$$

$$B=-1$$

$$\boxed{\frac{x+5}{(x-3)(x+1)}=\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x+1}}$$

ZAKRÝVACÍ METODA

$$\frac{x+5}{\cancel{(x-3)}(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+1}$$

$= 0$ $\quad 3$

$A = \frac{8}{4}$ $\quad B = \frac{4}{-4}$

Př

$$\frac{2x^2-5x+5}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} =$$

$A = \frac{12}{6} = 2$

$B = \frac{2}{-2} = -1$

$C = \frac{3}{3} = 1$

$$= \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

Př

$$\frac{2x^2-1}{x^3-x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} =$$

$=$

$B = \frac{-1}{-1} = 1$

$C = \frac{1}{1} = 1$

$A = ?$

DOSAZOVACÍ METODA:

$$2x^2-1 = A \cdot x \cdot (x-1) + 1(x-1) + 1 \cdot x^2$$

$$Ax^2 + x^2 = 2x^2$$
$$Ax^2 = x^2 \Rightarrow \underline{\underline{A=1}}$$

$x = 1$
$$1 = A(-1)\cdot(-1-1) + 1(-1-1) + 1$$
$$1 = A\cdot 2 - 2 + 1$$
$$2A = 2$$
$$\underline{\underline{A = 1}}$$

$\boxed{\text{Př}: 2}$

$$\frac{\overset{1}{x^3} \overset{-3}{- 3x^2} \overset{-3}{- 3x} \overset{-10}{- 10}}{(x-1)^2\cdot(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$B = \frac{-15}{5} = \underline{\underline{-3}}$$

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 10 = A(x-1)(x^2+4) - 3(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$x = 0$
$$-10 = A(-1)(4) - 3(4) + D(-1)^2$$
$$-10 = -4A - 12 + D$$
$$\underline{2 = -4A + D}$$

$x = 1$ $\times$
$$-15 = -3\cdot 5$$

$x = -1$
$$-1 - 3 + 3 - 10 = A(-2)(5) - 3(5) + (-C+D)(-2)^2$$
$$-11 = -10A - 15 + (-4C + 4D)$$
$$4 = -10A - 4C + 4D$$
$$\underline{2 = -5A - 2C + 2D}$$

$x = 2$
$$2^3 - 3\cdot 4 - 6 - 10 = A\cdot 8 - 3(8) + (2C+D)(1)$$
$$8 - 12 - 6 - 10$$

$$-20 = 8A - 24 + 2C + D$$

$$4 = 8A + 2C + D$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] :(-4) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3/2 & 4 \\ 0 & 0 & 15/4 & 15/2 \end{array}\right]$$

$$-\frac{5}{4} + \frac{2}{1} = \frac{-5+8}{4} = \frac{3}{4}$$

$$-\frac{5}{2} + \frac{2}{1} = \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{1} + \frac{3}{4} = \frac{12+3}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\frac{8}{1} - \frac{1}{2} = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$

$C = 1$

$A = 0$

$D = 2$

$B = -3$

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

$a + b \cdot i$

reálná č. — imaginární č.

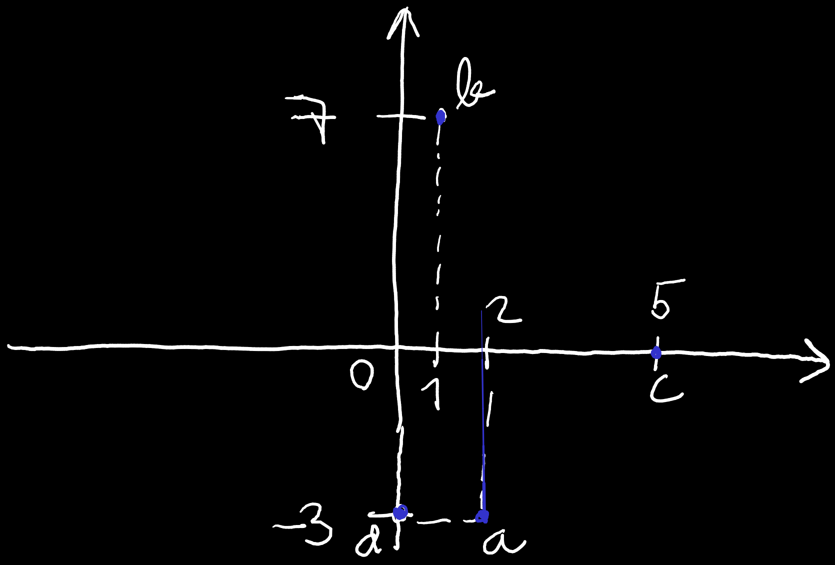
$\underline{\underline{i^2 = -1}}$

$a + b \cdot j \quad a, b \in \mathbb{R}$

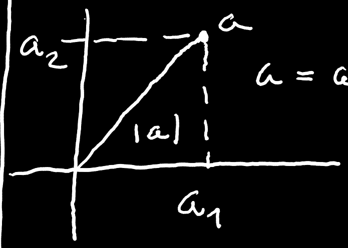
$j^2 = -1$

i … imaginární jednotka

ALGEB. TVAR
$a = 2 - 3i$
$b = 1 + 7i$
$c = 5$
$d = -3i$



VELIKOST KOMPLEXNÍHO ČÍSLA



$a = a_1 + a_2 \cdot i$

$$\boxed{|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$a = 4 - 5i$

$|a| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

NECHŤ $x = a + b \cdot i$ je nějaké komplexní číslo

ČÍSLEM OPAČNÉM ROZUMÍME ČÍSLO $-x = -a - bi$

A ČÍSLEM KOMPLEXNĚ SDRUŽENÝM $\bar{x} = a - bi$

$a = 2 - i$	$-a = -2 + i$	$\bar{a} = 2 + i$
$b = -7$	$-b = 7$	$\bar{b} = -7$
$c = 2i$	$-c = -2i$	$\bar{c} = -2i$

OPERACE – SČÍTÁNÍ + ODČÍTÁNÍ

$a = \underline{2} \underline{- i}$

$b = \underline{-7} \underline{+3i}$

$a + b = -5 + 2i$

$a - b = 2 - i + 7 - 3i = 9 - 4i$

$2 - i - (-7 + 3i) = 9 - 4i$

$a = a_1 + a_2 i$

$b = b_1 + b_2 i$

$$a \cdot b = (a_1 + a_2 i)(b_1 + b_2 i) = a_1 b_1 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + a_2 b_2 \underbrace{i^2}_{=-1}$$

$$\big((a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\big)$$

Př

$c = (2+7i)$

$d = (3-4i)$

$$c \cdot d = (2+7i)(3-4i) = 6 - 8i + 21i - 28i^2 = 28 + 6 + 13i = \underline{\underline{34 + 13i}}$$

DĚLENÍ

$$\frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{\bar{d}}{\bar{d}}$$

$$\frac{2+7i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{6+8i+21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{-22+29i}{25} = \frac{-22}{25} + \frac{29}{25} i$$

Př

$$\frac{2}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-2i}{1} = \underline{\underline{-2i}}$$

VYŠŠÍ MOCNINY

$$\boxed{\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \end{aligned}}$$

$$i^{35} = i^{32} \cdot i^3 = -i$$

$$(2 - i^{99})(1 + i^{27}) = (2+i)(1-i) = 2 - 2i + i - i^2 = 2 - i + 1 = \underline{\underline{3 - i}}$$

Př

$a = (1-2i)$

$b = (3+i)$

$c = (-2-i)$

1) $(a+b)\cdot c = (4-i)\cdot(-2-i) = -8-4i+2i+i^2 =$
$= -8-2i-1 = \underline{\underline{-9-2i}}$

2) $\overline{(a-c)}\cdot b = (3+i)\cdot(3+i) =$
$= 9+3i+3i+i^2 =$
$= \underline{\underline{8+6i}}$

3) $|2-4i-(9+3i)+(-2-i)| = |-9-8i| = \sqrt{81+64}$
$= \sqrt{145}$

4) 0

5) $\frac{a}{b}+c = \frac{1-2i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}+(-2-i) =$

$$= \frac{3-i-6i+2i^2}{9-i^2}+(-2-i) =$$

$$= \frac{3-7i-2}{9+1}+(-2-i) =$$

$$= \frac{1}{10}-\frac{7}{10}i+(-2-i) =$$

$$= \frac{1}{10}-\frac{20}{10}-\frac{7}{10}i-\frac{10}{10}i =$$

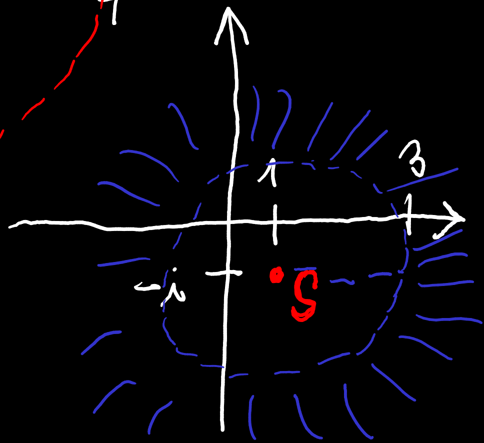
$$= \underline{\underline{\frac{-19}{10}+\frac{-17}{10}i}}$$

ZNÁZORNĚTE V GAUSSOVĚ ROVINĚ

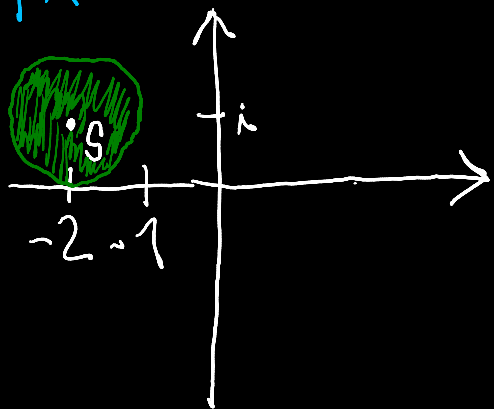
a) $|x-1|=3$

b) $|x-1+i|>2$

$x-(1-i)$



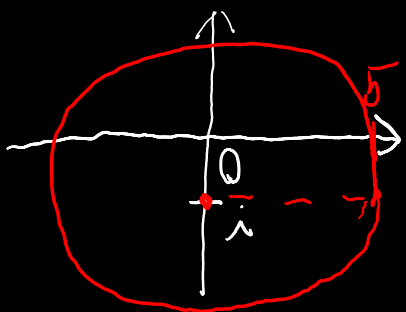
c) $|x+2-i|\leq 1$



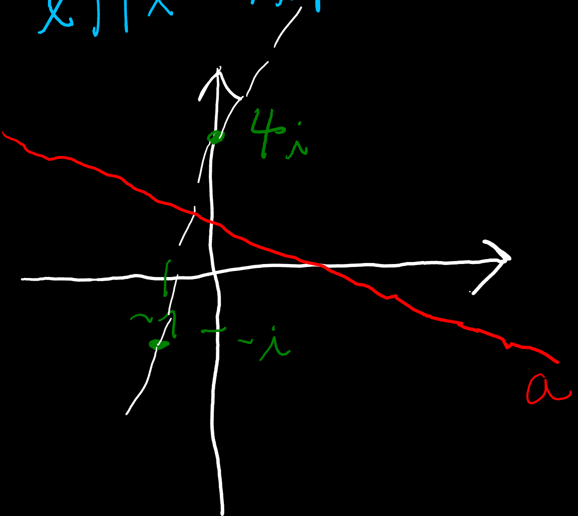
d) $|x+i|=|4+3i|$

$\sqrt{16+9}=\underline{\underline{5}}$

$|x+i|=5$



e) $|x-4i|=|x+1+i|$



f) $\frac{1}{2}<|x|<|1+i|$

$|x-1+2i|\geq|x+2-i|$

LINEÁRNÍ KOMPLEXNÍ RCE

$$\frac{5}{1+2i}\cdot x+1+3i=\frac{5}{2+i}\cdot x \quad /(1+2i)(2+i)$$

$$5x(2+i)+(1+3i)(1+2i)(2+i)=5x(1+2i)$$

$$10x+5ix+(1+2i+3i+6i^2)(2+i)=5x+10ix$$

$$1+5i+6i^2$$

$$10x+5ix+(2+i+10i+5i^2+12i^2+6i^3)=5x+10ix$$

$$10x+5ix+2+11i+17i^2+6i^3=5x+10ix$$

$$2+11i+17i^2+6i^3=-5x+5ix$$

$$\underline{\underline{x=2+i}}$$

$3\bar{x} - (8-6i) = -5x$

$x = a+bi$

$3(a-bi) - (8-6i) = -5\underset{(a+bi)}{} \quad \bar{x} = a-bi$

$3a - 3bi - 8 + 6i = -5a - 5bi$

$8a - 8 = -2bi - 6i \Rightarrow 8a = 8$

$-3b + 6 = -5b \Rightarrow \underline{\underline{b = -3}} \quad \underline{\underline{a = 1}}$

$\boxed{x = 1 - 3i}$

KVADRATICKÁ RCE V C

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$

$\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2}$

$\nearrow \underline{\underline{x_1 = -1 + 2i}}$

$\searrow \underline{\underline{x_2 = -1 - 2i}}$

$\dfrac{2x+3}{x-1} = \dfrac{x+6}{x+2} \quad x \neq 1, -2$

$(2x+3)(x+2) = (x+6)(x-1)$

$$2x^2+4x+3x+6=x^2-x+6x-6$$

$$x^2+2x+12=0$$

$$D=4-4\cdot 12=4-48=-44=4\cdot 11i^2$$

$$\sqrt{D}=2\sqrt{11}i$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{11}i}{2}=\begin{cases}-1+\sqrt{11}i\\ -1-\sqrt{11}i\end{cases}$$

$$x^2+(3-4i)x-48i=0$$

$a=1$

$b=3-4i$

$c=-48i$

$-24i$

$$D=9+16i^2-4\cdot(-48i)$$

$$D=9-24i+16i^2+192i$$

$D=-$ $=-7+168i$

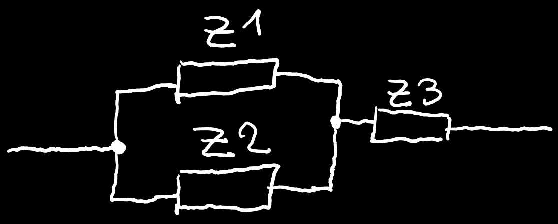
TOO HARD

$$\sqrt{D}=a+bi$$

$$a^2-b^2=-7$$

$$2ab=168$$

UŽITÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL V PRAXI



$z_1=(2+i)\,\Omega$

$z_2=(1-i)\,\Omega$

$z_3=(2i)\,\Omega$

$U=(100+20i)\,V$

$$Z=\frac{z_1\cdot z_2}{z_1+z_2}+z_3$$

$$z = \frac{(2+i)(1-i)}{(1-i)+(2+i)} + (2i)$$

$$z = \frac{2-2i+i-i^2}{3} + \frac{6i}{3} = \frac{3+5i}{3} = \left(1+\frac{5}{3}i\right)\Omega$$

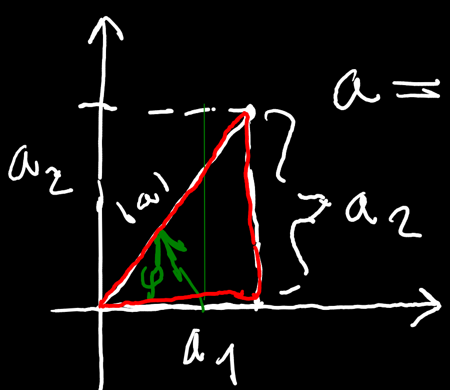
$$I = \frac{100+20i}{\frac{3+5i}{3}} = \frac{\frac{100+20i}{1}}{\frac{3+5i}{3}} = \frac{300+60i}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i} =$$

$$= \frac{900+180i-1500i-300i}{34}\,A$$

$$= \underline{\underline{\frac{-600-120i}{34}\,A}}$$

CHYBĚL JSEM 27.11.

KOMPLEXNÍ ČÍSLA V GONIOM. TVARU

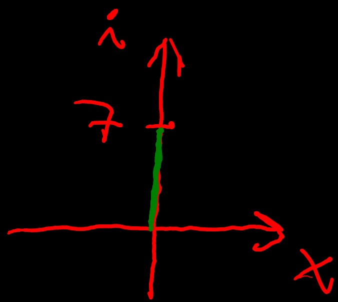


$$a = a_1 + a_2 i$$

$$\boxed{a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$a = |a|\,e^{i\varphi}$$

$a = 7i$



$$a = 7(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$
$$a = 7\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$$
$$a = 7e^{i\frac{\pi}{2}}$$

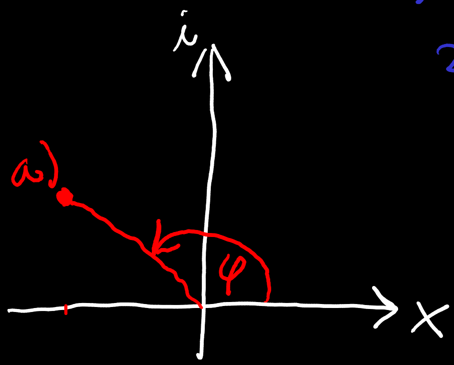
Př. Vyjádřete v goniom. a exp. tvaru číslo $a = -2\sqrt{3} + 2i$

1) Zakreslíme do gaussovy roviny

2) spočteme velikost $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

3) Najdu pomocný úhel ∡ v I. KV.

$$\cos\varphi' = \frac{|a_1|}{|a|}$$



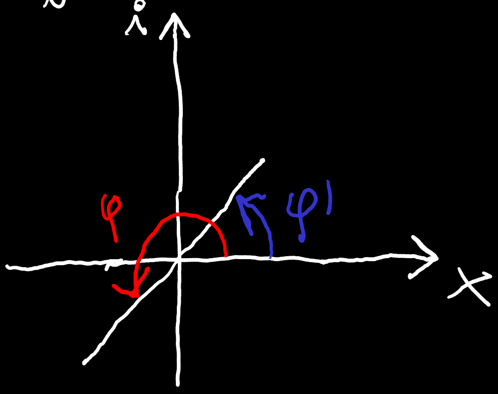
$$|a| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \underline{\underline{4}}$$

4) $\cos\varphi' = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\varphi' = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$a = 4(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$$
$$a = 4\left(\cos \tfrac{2}{3}\pi + i \ \tfrac{2}{3}\pi\right)$$
$$\underline{\underline{a = 4e^{i\frac{2}{3}\pi}}}$$

$b = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$



$$|b| = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\cos \varphi' = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi' = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\varphi = 225^\circ = \frac{5}{4}\pi$$

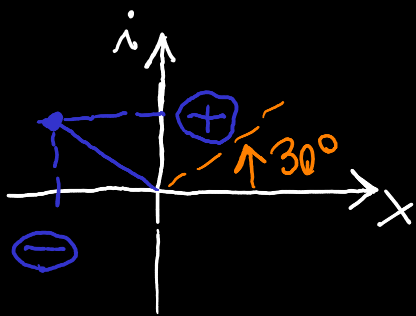
$$b = 2(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$$

$$b = 2\, e^{i \frac{5}{4}\pi}$$

OPAČNĚ

Převeďte na algebraický tvar číslo $5 e^{i \frac{5}{6}\pi}$

$$5 \cdot (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$



$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)$$

NÁSOBENÍ A DĚLENÍ ČÍSEL V GONIOM. / EXPON. TVARU

$$a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha) \qquad a = |a| e^{i\alpha}$$

$$b = |b| (\cos \beta + i \sin \beta) \qquad b = |b| e^{i\beta}$$

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| (\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta))$$

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \, e^{i(\alpha + \beta)}$$

$$a = 3 \cdot (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

$$b = 2 \cdot (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$

$$a \cdot b = 6 (\cos 450^\circ + i \sin 450^\circ)$$

$$ab = 6 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 6i$$

$$c = 4 \cdot e^{\frac{5}{3}\pi} \qquad c \cdot d = 8 e^{i \frac{40+15}{6}\pi}$$

$$d = 2 \cdot e^{i \frac{5}{2}\pi} \qquad c \cdot d = 8 e^{i \frac{25}{6}\pi} = \underline{\underline{8 e^{i \frac{\pi}{6}}}}$$

DĚLENÍ

$$a = |a| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$b = |b| (\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} (\cos(\alpha - \beta) + i \sin (\alpha - \beta))$$

$$a = 8 (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \qquad \frac{a}{b} = 4 (\cos (-180^\circ) + i \sin (-18$$

$$b = 2 (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) \qquad = 4 (\cos (180^\circ) + i \sin (150^\circ))$$

$$= \underline{\underline{-4}}$$

$c = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$

$d = 2e^{i\frac{7}{6}\pi}$

$$\frac{c}{d} = 3e^{i\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{7}{6}\pi\right)} = 3e^{i\left(-\frac{5}{6}\pi\right)} = \underline{\underline{3e^{i\frac{7}{6}\pi}}}$$

MOIEVROVA VĚTA

$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

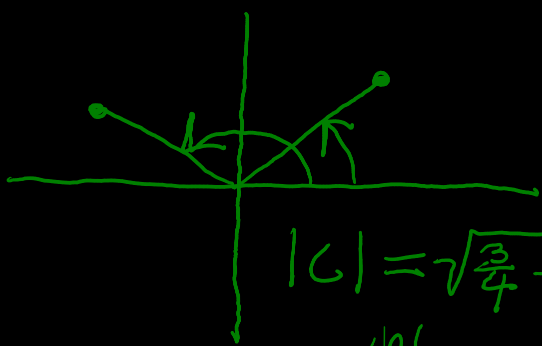
$a^n = |a|^n(\cos n\cdot\alpha + i\sin n\cdot\alpha)$

$a = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$a = 2^9\left(\cos\frac{9}{4}\pi + i\sin\frac{9}{4}\pi\right)$

$\underline{\underline{a = 2^9\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}}$

$c = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$



$|c| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

$\cos\varphi' = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$c^{18} = 1^{18}(\cos 18\cdot150^\circ + i\sin 18\cdot150^\circ)$ $\quad \varphi' = 30^\circ \quad \varphi = 150^\circ$

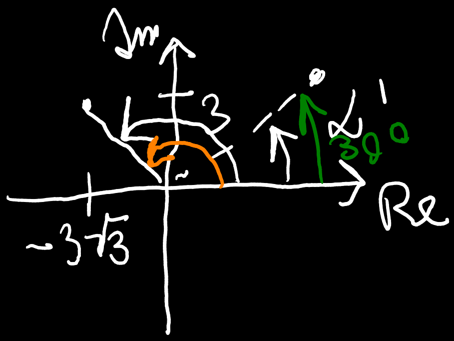
$c^{18} = 1(\cos 2700^\circ + i\sin 2700^\circ)$

$c^{18} = (\cos 900^\circ + i\sin 900^\circ)$

$c^{18} = (\underbrace{\cos 180^\circ}_{=-1} + i\underbrace{\sin 180^\circ}_{=0}) = \underline{\underline{-1}}$

04/12

Umocněte číslo $(-3\sqrt{3}+3i)^{17}$



$$\sqrt{(-3\sqrt{3})^2+9} = \sqrt{9\cdot 3+9} = 6$$

$$\cos\alpha' = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{|a_1|}{|a|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha' = 30° = \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha = 150°$$

$$a = 6\cdot(\cos 150° + i\sin 150°)$$

$$a^{17} = 6^{17}\cdot(\cos 150°\cdot 17 + i\sin 150°\cdot 17)$$

$$a^{17} = 6^{17}\cdot(\cos 2550° + i\sin 2550°)$$

$$a^{17} = 6^{17}(\cos 750° + i\sin 750°)$$

$$a^{17} = 6^{17}(\cos 30° + i\sin 30°)$$

$$\boxed{a^{17} = 6^{17}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}$$!

$\cos 4\alpha$; $\sin 4\alpha$

$$a = (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$a^4 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^4 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$$

$$= (\cos^2\alpha + 2\cdot i\cdot\cos\alpha\sin\alpha + i^2\sin^2\alpha)$$

$$(\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\sin\alpha + i^2\sin^2\alpha) =$$

$$= \cos^4\alpha + 2i\cos^3\alpha\sin\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha +$$

$2i\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\ \cos^2\alpha\sin^2\alpha + 2i^3\cos\alpha\sin^3\alpha +$
$i^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + 2i^3\cos\alpha\sin^3\alpha + i^4\sin^4\alpha$

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$$
$$\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha$$

ODMOCNINA Z KOMPLEXNÍHO ČÍSLA

$$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$a_n = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|}\cdot\left(\cos\frac{(\alpha+2k\pi)}{n} + i\sin\frac{(\alpha+2k\alpha)}{n}\right)$$

Př URČETE 4-ODMOCNINU Z ČÍSLA

$$b = 256\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$b_1 = \sqrt[4]{256}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{4}\right) =$$
$$= 4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$$
$$b_2 = 4\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{4}\right)$$
$$b_2 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$$
$$b_3 = 4\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$$
$$b_4 = 4\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$$

BINOMICKÁ RCE

$$x^n + b = c$$

$$x_n = \sqrt[n]{-\frac{c}{b}}$$

Př. $x^5 = -1$

$$-1 = \cos(180° + i \sin 150°)$$

$$x_n = \sqrt[5]{-1}$$

$$x_1 = \sqrt[5]{1} \cdot \cos\frac{180°}{5} + i \sin\frac{180°}{5})$$

$$x_1 = \cos 36° + i \sin 36°$$

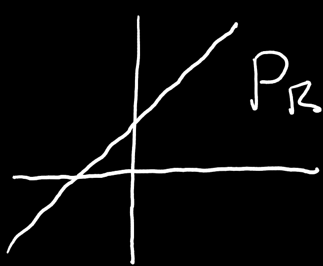
$$x_2 = (\cos\frac{180° + 360°}{5} + i \sin\frac{180° + 360°}{5})$$

$$x_2 = (\cos 108° + i \sin 108°)$$

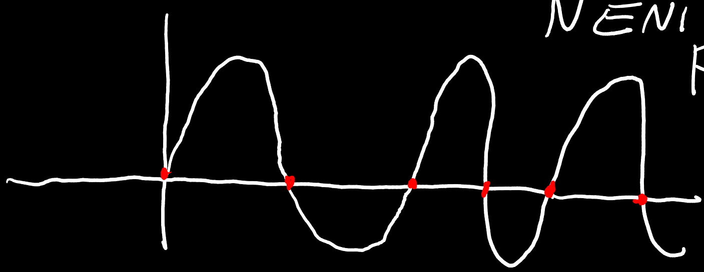
INVERZNÍ FUNKCE

Prostá fce

- fci nazveme prostou, jestliže pro každé 2 body z $D(f)$ platí: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$



PROSTÁ



NENÍ PROSTÁ

KAŽDÁ PROSTÁ FCE MÁ FCI INVERZNÍ

f: ← původní f^{-1} ← inverzní

EXP. FCE

$y = a^x$ $y = 2^x$

f^{-1} $x = a^y$ $x = 2^y$

$y = \log_a x$ $y = \log_2 x$

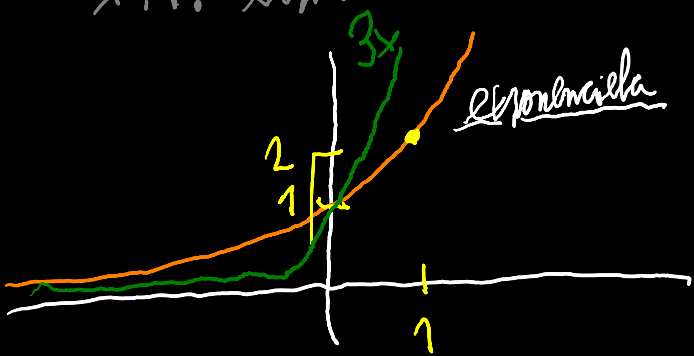
Exponenciální fce

$y = a^x$ …. a … základ $a \in R^+ - \{1\}$

x … exponent

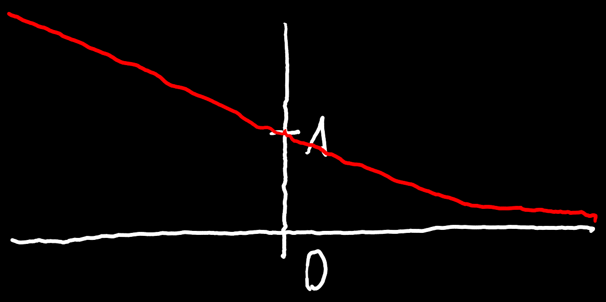
$\boxed{a > 1}$

$y = 2^x$



$\boxed{a<1}$

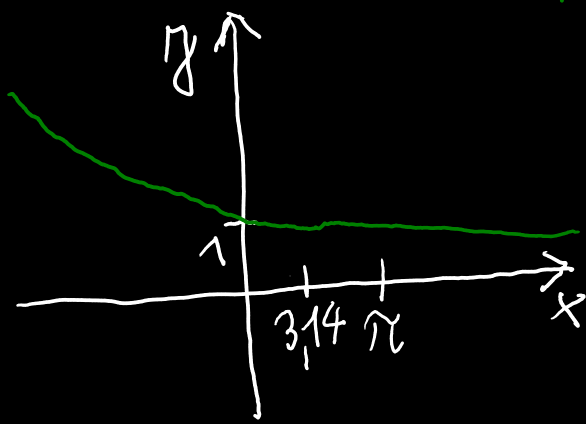
$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$



Pomocí grafu exp. fce zjistěte, zda platí:

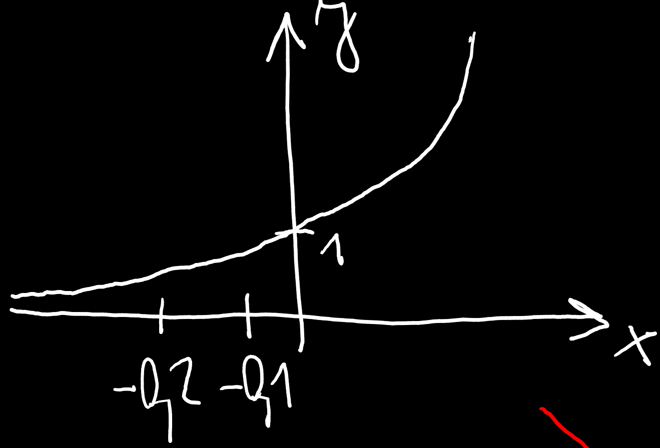
a) $(0,1)^{\pi} > (0,1)^{3,14}$ NE

$a<1$



b) $\sqrt{2}^{-0,1} > \sqrt{2}^{-0,2}$ ANO

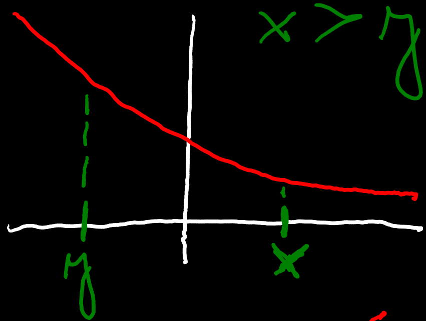
$\Rightarrow a>1$



Př. 2

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^y$

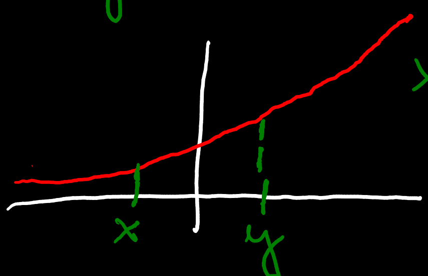
$x>y$



b) $\left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^x < \left(\frac{1}{2^{-1}}\right)^y$

$(2)^x < (2)^y$

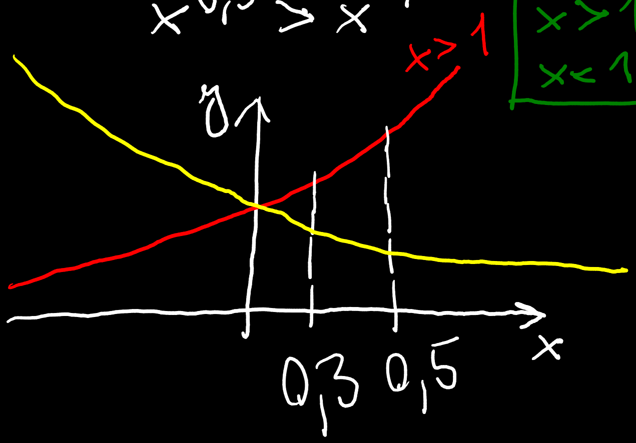
$x<y$



Př. 3

$x^{0,3} > x^{0,5}$

$\boxed{\begin{matrix} x>1 \\ x<1 \end{matrix} \Big\} ?}$ $\quad x > 1$ ✗ $\quad x < 1$ ✓



EXP. RCE

① STEJNÝ ZÁKLAD

– úpravami dojdeme na

④ $a^{-n} = \frac{1}{a^{n}} \qquad \frac{1}{a^{-n}} = a^{n}$

⑤ $\sqrt[n]{a^{s}} = a^{\frac{s}{n}}$

$2^{x+1} = \frac{1}{4}$

$2^{x+1} = \frac{1}{2^{2}}$

$2^{x+1} = 2^{-2}$

$x+1 = -2$

$\underline{\underline{x = -3}}$

$$5^{2x-3}=1$$

$$5^{2x-3}=5^0$$

$$2x=3$$

$$\underline{\underline{x=\frac{3}{2}}}$$

$$2^x\cdot 4^{x-4}=\left(\frac{1}{16}\right)^{2x-1}$$

$$2^x\cdot(2^2)^{x-4}=\left(\frac{1}{2^4}\right)^{2x-1}$$

$$2^x\cdot 2^{2x-8}=2^{-8x+4}$$

$$2^{3x-8}=2^{-8x+4}$$

$$3x-8=-8x+4$$

$$11x=12$$

$$\underline{\underline{x=\frac{12}{11}}}$$

$$\sqrt[3]{2^x}\cdot\sqrt{8^{x-1}}=4^{3x+3}$$

$$2^{\frac{x}{3}}\cdot\sqrt{(2^3)^{x-1}}=(2^2)^{3x+3}$$

$$2^{\frac{x}{3}}\cdot 2^{\frac{3x-3}{2}}=2^{6x+6}$$

$$\frac{x}{3}+\frac{3x-3}{2}=6x+6$$

$$\frac{2x+9x-9}{6}=6x+6$$

$$2x+9x-9=36x+36$$

$$11x=36x+45$$

$$-25x=45$$

$$x=-\frac{45}{25}$$

$$x=-\frac{9}{5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x+2} = \frac{27}{8}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4x-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

$$x-1-4x-4=-3$$

$$-3x=2$$

$$\underline{\underline{x=-\frac{2}{3}}}$$

$$\sqrt[4]{4^{y}} \cdot \sqrt[3]{2^{y-3}} = \sqrt[6]{16}$$

$$4^{\frac{y}{4}} \cdot 2^{\frac{y-3}{3}} = 2^{\frac{4}{6}}$$

$$2^{\frac{2y}{4}} \cdot 2^{\frac{y-3}{3}} = 2^{\frac{4}{6}}$$

$$\frac{y}{2}+\frac{y-3}{3}=\frac{4}{6}$$

$$3y+2y-6=4$$

$$5y=10$$

$$\underline{\underline{y=2}}$$

$$27^{x^2-7x+10} = 1$$

$$27^0$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-5)(x-2) \qquad \underline{\underline{x_1=5}} \quad \underline{\underline{x_2=2}}$$

$\boxed{\text{VYTÝKÁNÍ}}$

$$3^x+3^{x+2}=90$$

$$3^x+3^x\cdot 3^2=90$$

$$3^x(1+9)=90$$

$$3^x\cdot 10=90$$

$$3^x=9$$

$$3^x=3^2$$

$$\boxed{\underline{\underline{x=2}}}$$

$$2 \cdot 5^{y+2} - 5^{y+1} = 9$$

$$2 \cdot 5^{y} \cdot 5^{2} - 5^{y} \cdot 5^{1} = 9$$

$$5^{y}\left(2 \cdot 5^{2} - 5^{1}\right) = 9$$

$$5^{y}\left(50 - 5\right) = 9$$

$$5^{y} \cdot (45) = 9$$

$$5^{y} \cdot 5^{1} = 1$$

$$5^{y} \cdot 5^{1} = 5^{0}$$

$$y = -1$$